2 Fungsi dan Limit

Karya termasyur [Cours d'analyse dari Cauchy] harus dibaca oleh siapa saja yang mencintai ketelitian dalam penyelidikan matematis.
Niels Hendrik Abel

Augustin-Louis Cauchy
1789–1857

Augustin-Louis Cauchy lahir di Paris dan dididik di Ecole Polytechnique. Karena kesehatan yang buruk ia dinasehatkan untuk memusatkan pikiran pada matematika. Selama karirnya, ia menjabat mahaguru di Ecole Polytechnique, Sorbonne, dan College de France. Sumbangan-sumbangan matematisnya cemerlang dan mengejutkan dalam jumlahnya. Produktivitasnya sangat hebat sehingga Academy Paris memilih untuk membatasi ukuran makalahnya dalam majalah ilmiah untuk mengatasi keluaran dari Cauchy.

Cauchy seorang pemeluk Katolik saleh dan pengikut Raja yang patuh. Dengan menolak bersumpah setia kepada pemerintah Perancis yang berkuasa dalam tahun 1830, ia mengasingkan diri ke Italia untuk beberapa tahun dan mengajar di beberapa institut keagamaan di Paris sampai sumpah kesetiaan dihapuskan setelah revolusi 1848.

Cauchy mempunyai perhatian luas. Ia mencintai puisi dan mengarang suatu naskah dalam ilmu persajakan bahasa Yahudi. Keimanannya dalam beragama mengantarnya mensponsori kerja sosial untuk ibu-ibu tanpa nikah dan narapidana.

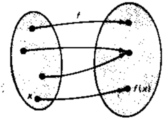
Walaupun kalkulus diciptakan pada akhir abad ke tujuh belas, dasar-dasarnya tetap kacau dan berantakan sampai Cauchy dan rekan sebayanya (Gauss, Abel, dan Bolzano) mengadakan ketelitian baku. Kepada Cauchy kita berhutang pemikiran pemberian dasar kalkulus pada definisi yang jelas dari konsep limit. Semua buku-ajar modern mengikuti, paling sedikit dalam intinya, penjelasan kalkulus yang terinci oleh Cauchy.

2.1 Fungsi dan Grafiknya

Bayangkanlah suatu fungsi sebagai sebuah senapan. Fungsi ini mengambil amunisi dari suatu himpunan yang dinamakan *daerah asal* (daerah definisi, domain) dan menembakkannya pada suatu himpunan sasaran. Setiap peluru mengenai sebuah titik sasaran *tunggal*, tetapi dapat terjadi bahwa beberapa peluru mendarat pada titik yang sama. Kita dapat menyatakan definisi secara lebih formal dan memperkenalkan beberapa cara penulisan secara bersamaan.

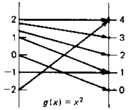
Definisi

Sebuah **fungsi** f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut **daerah asal**, dengan sebuah nilai unik $f(x)$ dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut **daerah hasil** (jelajah) fungsi tersebut (Lihat Gambar 1).



GAMBAR 1

Definisi ini tidak memberikan pembatasan pada himpunan-himpunan daerah asal dan daerah hasil. Daerah asal mungkin terdiri dari himpunan orang dalam kelas kalkulus anda, daerah nilai berupa himpunan angka $\{A, B, C, D, F\}$ yang akan diberikan, dan aturan padanan adalah prosedur yang dipakai dosen anda dalam memberikan angka.



GAMBAR 2

Dalam kalkulus yang akan lebih bertalian adalah contoh-contoh dengan daerah asal dan daerah hasil di mana keduanya berupa himpunan bilangan riil. Misalnya, fungsi g mungkin mengambil sebuah bilangan riil x dan mengkuadratkannya, sehingga menghasilkan bilangan riil x^2. Dalam hal ini, kita mempunyai sebuah rumus yang memberikan aturan padanan, yaitu $g(x) = x^2$. Sebuah diagram skematis untuk fungsi ini diperlihatkan dalam Gambar 2.

NOTASI FUNGSI. Untuk memberi nama fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f (atau g atau F). Maka $f(x)$, yang dibaca "f dari x" atau "f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Jadi, jika $f(x) = x^3 - 4$,

$$f(2) = 2^3 - 4 = 4$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -5$$
$$f(a) = a^3 - 4$$
$$f(a + h) = (a + h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$$

Pemahaman yang jelas tentang cara menuliskan fungsi adalah hal yang sangat penting dalam kalkulus. Pelajarilah contoh-contoh berikut secara seksama. Contoh-contoh tersebut akan memainkan peranan penting dalam bab berikutnya.

CONTOH 1. Untuk $f(x) = x^2 - 2x$, cari dan sederhanakan: (a) $f(4)$, (b) $f(4+h)$, (c) $f(4+h) - f(4)$, (d) $[f(4+h) - f(4)]/h$

Penyelesaian

(a) $f(4) = 4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

(b) $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h$
$= 8 + 6h + h^2$

(c) $f(4+h) - f(4) = 8 + 6h + h^2 - 8 = 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dfrac{6h + h^2}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = 6 + h$ ■

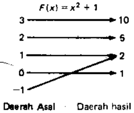
CONTOH 2. Untuk $g(x) = 1/x$, cari dan sederhanakan $[g(a+h) - g(h)]/h$

Penyelesaian

$$\frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}$$

$$= \frac{-h}{(a+h)a} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{(a+h)a} = \frac{-1}{a^2 + ah}$$ ■

DAERAH ASAL DAN DAERAH HASIL. Aturan padanan merupakan pusat dari suatu fungsi, tetapi sebuah fungsi belum secara lengkap ditentukan sampai daerah asalnya diberikan. Ingatlah kembali bahwa *daerah asal* adalah himpunan elemen-elemen pada mana fungsi itu mendapat nilai. *Daerah hasil* adalah himpunan nilai-nilai yang diperoleh secara demikian. Misalnya, jika F adalah fungsi dengan aturan $F(x) = x^2 + 1$ dan jika daerah asal dirinci sebagai $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$ (Gambar 3), maka daerah hasilnya adalah $\{1, 2, 5, 10\}$. Daerah asal dan aturan untuk menentukan daerah hasil tersebut.



GAMBAR 3

Bilamana untuk sebuah fungsi daerah asalnya tidak dirinci, kita selalu menganggap bahwa daerah asalnya adalah himpunan bilangan riil yang terbesar sehingga aturan fungsi ada maknanya dan memberikan nilai bilangan riil. Ini disebut daerah asal mula (domain natural).

CONTOH 3. Cari daerah asal mula (natural) untuk: (a) $f(x) = 1/(x-3)$; (b) $g(t) = \sqrt{9 - t^2}$.

Penyelesaian

(a) Daerah asal mula untuk f adalah $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$. Ini dibaca "himpunan x dalam $\mathbb{R}$ (bilangan riil) sedemikian sehingga x tidak sama dengan 3". Kita kecualikan 3 untuk menghindari pembagian oleh 0.

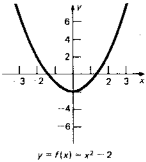
(b) Di sini kita harus membatasi t sedemikian sehingga $9 - t^2 \geq 0$ dengan tujuan menghindari nilai-nilai tak riil untuk $\sqrt{9 - t^2}$. Ini dicapai dengan mensyaratkan bahwa $|t| \leq 3$. Sehingga, daerah asal mula adalah $\{t \in \mathbb{R} : |t| \leq 3\}$. Dalam cara penulisan selang, kita dapat menulis daerah asal sebagai $[-3, 3]$. ■

Bilamana aturan untuk suatu fungsi diberikan oleh sebuah persamaan berbentuk $y = f(x)$ (misalnya, $y = x^3 + 3x - 6$), x seringkali disebut **variabel bebas** dan y **variabel tak bebas**. Sebarang elemen dari daerah asal boleh dipilih sebagai nilai dari variabel bebas x, tetapi pilihan itu secara tuntas menentukan nilai padanan dari variabel tak bebas. Jadi, nilai y tergantung dari pilihan nilai x.

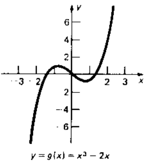
GRAFIK FUNGSI. Bilamana daerah asal dan daerah hasil sebuah fungsi merupakan bilangan riil, kita dapat membayangkan fungsi itu dengan menggambarkan grafiknya pada suatu bidang koordinat. Dan **grafik fungsi** f adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$.

CONTOH 4. Buatlah sketsa grafik dari: (a) $f(x) = x^2 - 2$; (b) $g(x) = x^3 - 2x$; (c) $h(x) = 2/(x - 1)$.

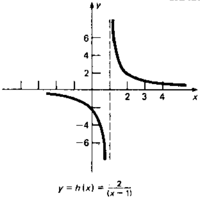
Penyelesaian Kita gunakan daerah asal mula (domain natural). Dalam kasus f dan g, ini berupa himpunan semua bilangan riil $\mathbb{R}$; untuk h, ini adalah semua $\mathbb{R}$ kecuali 1. Dengan mengikuti prosedur yang diuraikan dalam Pasal 1.7 (buat sebuah tabel nilai, rajah titik-titik yang berpadanan, hubungkan titik-titik ini dengan sebuah kurva mulus), kita peroleh tiga grafik yang diperlihatkan dalam Gambar 4 sampai 6.



GAMBAR 4



GAMBAR 5



GAMBAR 6

■

Perhatikan grafik dari h secara lebih saksama; grafik ini menunjukkan suatu penyederhanaan berlebihan yang kita buat dan sekarang perlu diperbaiki. Pada waktu menghubungkan titik-titik yang dirajah dengan sebuah kurva mulus, jangan melakukannya secara mekanis sehingga mengabaikan keistimewaan yang mungkin jelas kelihatan dari rumus fungsi tersebut. Dalam kasus $h(x) = 2/(x - 1)$ jelas bahwa sesuatu yang dramatis harus terjadi bilamana x mendekati 1. Nyatanya, nilai-nilai $|h(x)|$ membesar tanpa batas (misalnya, $h(0{,}99) = -200$ dan $h(1{,}001) = 2000$). Kita telah menunjukkan ini dengan menarik sebuah garis tegak putus-putus yang disebut **asimtot**, pada $x = 1$. Bila x mendekati 1, grafik semakin mendekati garis ini, walaupun garis ini sendiri bukan merupakan bagian dari grafik, melainkan lebih merupakan suatu garis petunjuk. Perhatikan bahwa grafik dari h juga mempunyai sebuah asimtot mendatar, yakni sumbu x.

Kita mungkin bertanya; Apa daerah nilai untuk masing-masing tiga fungsi ini? Jawabnya, yang kita peroleh dengan melihat pada grafik, diberikan dalam tabel.

Fungsi	*Daerah asal*	*Daerah hasil*
$f(x) = x^2 - 2$	$\mathbb{R}$	$\{y \in \mathbb{R} : y \geq -2\}$
$g(x) = x^3 - 2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$h(x) = \dfrac{2}{x-1}$	$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$	$\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$

FUNGSI GENAP DAN GANJIL. Seringkali kita memperkirakan kesimetrian grafik suatu fungsi dengan memeriksa rumus fungsi tersebut. Jika $f(-x) = f(x)$, maka grafik simetri terhadap sumbu y. Fungsi yang demikian disebut **fungsi genap**, barangkali karena fungsi yang merinci $f(x)$ sebagai jumlah dari pangkat-pangkat genap x adalah genap. Fungsi $f(x) = x^2 - 2$ (digrafikkan dalam Gambar 4) adalah genap; demikian juga $f(x) = 3x^6 - 2x^4 + 11x^2 - 5$, $f(x) = x^2/(1 + x^4)$ dan $f(x) = (x^3 - 2x)/3x$.

Jika $f(-x) = -f(x)$, grafik simetri terhadap titik asal. Kita sebut fungsi yang demikian **fungsi ganjil**. Fungsi yang memberikan $f(x)$ sebagai jumlah dari pangkat-pangkat ganjil x adalah ganjil. Jadi, $g(x) = x^3 - 2x$ (digrafikkan dalam Gambar 5) adalah ganjil. Perhatikan bahwa

$$g(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$$

Ambillah fungsi ketiga $h(x) = 2/(x - 1)$, yang kita grafikkan dalam Gambar 6. Fungsi ini tidak genap ataupun ganjil. Untuk melihat ini, amati bahwa $h(-x) = 2/(-x - 1)$, yang tidak sama dengan $h(x)$ atau pun $-h(x)$. Perhatikan bahwa grafiknya tidak simetri terhadap sumbu x atau pun titik asal. (Grafik dari h memang simetri terhadap titik (1,0), hasil yang berasal dari kenyataan bahwa $h(1 + x) = -h(1-x)$.)

CONTOH 5. Apakah $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^4 - 3x^2 + 4}$ genap, ganjil, atau bukan keduanya?

Penyelesaian Karena

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^4 - 3(-x)^2 + 4} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^4 - 3x^2 + 4} = -f(x)$$

f adalah fungsi ganjil. ■

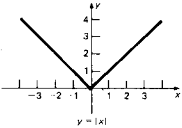
Untuk fungsi-fungsi genap dan ganjil lainnya, lihat Soal 23 dan 24 pada Pasal 2.2.

DUA FUNGSI KHUSUS. Di antara fungsi-fungsi yang akan sering digunakan sebagai contoh terdapat dua yang sangat khusus: fungsi nilai mutlak $|\ |$ dan fungsi bilangan bulat terbesar $[\![\ ]\!]$. Fungsi-fungsi ini didefinisikan dengan

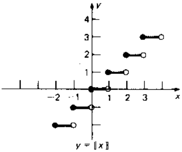
$$|x| = \begin{cases} x & \text{jika } x \geq 0 \\ -x & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

dan $[\![x]\!]$ = bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x.

Jadi, $|-3{,}1| = |3{,}1| = 3{,}1$, sedangkan $[\![-3{,}1]\!] = -4$ dan $[\![3{,}1]\!] = 3$. Yang pertama adalah fungsi genap, karena $|-x| = |x|$. Apakah $[\![\ ]\!]$ genap, atau ganjil, atau bukan salah satunya? Kita perlihatkan grafik dua fungsi ini dalam Gambar 7 dan 8.



GAMBAR 7



GAMBAR 8

Kita seringkali akan tertarik pada ciri khas berikut dari fungsi-fungsi ini. Grafik $|x|$ mempunyai sudut tajam pada titik asal, sedangkan grafik $[\![x]\!]$ melompat pada tiap bilangan bulat.

SOAL-SOAL 2.1

1. Untuk $f(x) = x^2 - 1$, hitunglah masing-masing nilai.

(a) $f(1)$ (b) $f(-2)$
(c) $f(0)$ (d) $f(k)$
(e) $f(-6)$ (f) $f(\frac{1}{2})$
(g) $f(2t)$ (h) $f(3x)$
(i) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

2. Untuk $F(x) = 3x^3 + x$, hitunglah masing-masing nilai.

(a) $F(-6)$ (b) $F(\frac{1}{2})$
(c) $F(3.2)$ (d) $F(\sqrt{3})$
(e) $F(\pi)$ (f) $F\left(\frac{1}{x}\right)$

3. Untuk $G(y) = 1/(y - 1)$, hitunglah masing-masing nilai.

(a) $G(0)$ (b) $G(0.999)$
(c) $G(1.01)$ (d) $G(y^2)$
(e) $G(-x)$ (f) $G\left(\frac{1}{x^2}\right)$

4. Untuk $\phi(t) = \sqrt{t}/(1 + t^2)$, hitunglah masing-masing nilai.

(a) $\phi(0)$ (b) $\phi(\frac{1}{4})$
(c) $\phi(x^3)$ (d) $\phi(x + 2)$
(e) $\phi(-t)$ (f) $\phi\left(\frac{1}{t^4}\right)$

[C] 5. Untuk

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 2x + 1$$
$$= \{[(x + 3)x - 6]x + 2\}x + 1,$$

hitunglah masing-masing nilai.

(a) $f(0{,}32)$ (b) $f(\pi)$
(c) $f(3 + \sqrt{2})$

[C] 6. Untuk

$$g(x) = x^5 - 5x^3 + 2x^2 - \pi x + \sqrt{3}$$
$$= \{[(x^2 - 5)x + 2]x - \pi\}x + \sqrt{3},$$

hitunglah masing-masing nilai.

(a) $g(-1{,}71)$ (b) $g(3{,}01)$
(c) $g(\sqrt{3})$

[C] 7. Untuk $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}/(x - \sqrt{3})$. hitunglah masing-masing nilai.

(a) $f(0{,}79)$ (b) $f(12{,}26)$
(c) $f(\sqrt{3})$

[C] 8. Jika $G(t) = t^{2/3} - 4\sqrt{t}$, hitunglah masing-masing nilai.

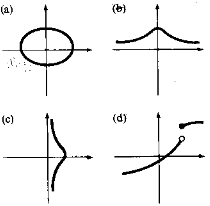
(a) $G(1{,}46)$ (b) $G(\pi)$
(c) $G(-1{,}23)$

9. Mana dari yang berikut menentukan suatu fungsi f dengan rumus $y = f(x)$? Untuk yang demikian, cari $f(x)$. *Petunjuk:* Selesaikan untuk y dalam bentuk x, dan perhatikan bahwa definisi fungsi mensyaratkan suatu y tunggal untuk tiap x.

(a) $x^2 + y^2 = 4$ (b) $xy + y + 3x = 4$

(c) $x = \sqrt{3y + 1}$ (d) $3x = \dfrac{y}{y + 1}$

10. Mana dari grafik-grafik dalam Gambar 9 merupakan grafik dari fungsi-fungsi dengan rumus berbentuk $y = f(x)$?



GAMBAR 9

Soal ini menyarankan suatu aturan: ***Untuk grafik yang menjadi grafik fungsi $y = f(x)$*, setiap garis vertikal harus menyatu dengan grafiknya dalam satu titik.**

11. Untuk $f(x) = 2x^2 - 1$, cari dan sederhanakan $[f(a + h) - f(a)]/h$. (Lihat Contoh 1 dan 2).

12. Untuk $F(t) = 4t^3$, cari dan sederhanakan $[F(a + h) - F(a)]/h$.

13. Untuk $g(u) = 3/(u - 2)$, cari dan sederhanakan $[g(x + h) - g(x)]/h$.

14. Untuk $G(t) = t/(t + 4)$, cari dan sederhanakan $[G(a + h) - G(a)]/h$.

15. Cari daerah asal mula (domain natural) untuk masing-masing yang berikut. (Lihat Contoh 3).

(a) $F(z) = \sqrt{2z + 3}$ (b) $g(v) = 1/(4v - 1)$
(c) $\psi(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ (d) $H(y) = -\sqrt{625 - y^4}$

16. Cari daerah asal mula dalam tiap kasus.

(a) $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 - x - 6}$ (b) $G(y) = \sqrt{(y + 1)^{-1}}$

(c) $\phi(u) = |2u + 3|$ (d) $F(t) = t^{2/3} - 4$

Dalam Soal-soal 17-32, nyatakanlah apakah fungsi yang diberikan genap atau ganjil atau tidak satu pun, kemudian sketsakan grafiknya. (Lihat Contoh-contoh 4 dan 5).

17. $f(x) = -4$
18. $f(x) = 3x$
19. $F(x) = 2x + 1$
20. $F(x) = 3x - \sqrt{2}$
21. $g(x) = 3x^2 + 2x - 1$
22. $g(u) = \dfrac{u^3}{8}$
23. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$
24. $\phi(z) = \dfrac{2z + 1}{z - 1}$
25. $f(w) = \sqrt{w - 1}$
26. $h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
27. $f(x) = |2x|$
28. $F(t) = -|t + 3|$
29. $g(x) = \left[\!\left[\dfrac{x}{2}\right]\!\right]$
30. $G(x) = [\![2x - 1]\!]$

31. $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t \le 0 \\ t+1 & \text{jika } 0 < t < 2 \\ t^2 - 1 & \text{jika } t \ge 2 \end{cases}$

32. $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{jika } x \le 1 \\ 3x & \text{jika } x > 1 \end{cases}$

33. Sebuah pabrik mempunyai kapasitas memproduksi lemari es tiap hari mulai 0 sampai 100. Biaya overhead harian untuk pabrik adalah Rp. 2.200.000 dan biaya langsung (karyawan dan bahan) Rp. 151.000. Tuliskan rumus untuk $T(x)$, biaya total memproduksi x lemari es dalam satu hari, dan juga biaya satuan $u(x)$ (biaya rata-rata tiap lemari es). Apakah daerah asal untuk fungsi-fungsi ini?

$\boxed{C}$. 34. Perusahaan ABC harus mengeluarkan biaya $400 + 5\sqrt{x(x-4}$ rupiah untuk membuat x buah mainan kompor yang dijual Rp. 6.000 sebuah.

(a) Cari rumus untuk $P(x)$, keuntungan total dalam membuat x kompor.

(b) Hitung $P(200)$ dan $P(1000)$.

(c) Berapa buah kompor harus dibuat oleh ABC agar mencapai titik impas (break even)?

$\boxed{C}$ 35. Carilah rumus untuk besaran $E(x)$ pada mana sebuah bilangan x melebihi pangkat tiganya. Gambarkan sebuah grafik yang sangat teliti dari $E(x)$ untuk $0 \le x \le 1$. Gunakan grafik tersebut untuk menaksir bilangan positif yang melebihi pangkat tiganya sebesar mungkin.

36. Andaikan p menyatakan keliling sebuah segitiga samasisi. Cari rumus untuk $A(p)$, yaitu luas segitiga yang demikian.

37. Agen Persewaan Mobil Honda membebankan Rp. 24.000 sehari untuk penyewaan sebuah mobil ditambah Rp. 400 tiap km. (a) Tuliskan rumus untuk pengeluaran penyewaan total $E(x)$ untuk sehari dengan x adalah jarak yang ditempuh dalam km.

(b) Jika anda menyewa mobil selama sehari, berapa km dapat anda tempuh untuk Rp. 120.000?

38. Sebuah tabung lingkaran tegak berjari-jari r diletakkan di dalam sebuah bola berjari-jari $2r$. Cari rumus untuk $V(r)$, yaitu volume tabung dinyatakan dalam r.

39. Suatu jalur yang panjangnya 1 mil mempunyai sisi-sisi sejajar dan membentuk setengah lingkaran. Tentukan rumus luas yang melingkupi jalur tersebut, $A(d)$, sebagai fungsi dari garis tengah setengah lingkaran itu. Berapakah daerah asal alamiah untuk fungsi ini?

40. Diketahui f adalah suatu fungsi dengan daerah asal N, memenuhi $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$, $f(5) = 5$, dan $f(6) = 9$. Setelah menemukan polanya, tuliskan aturan (rumus) untuk $f(n)$ dan tentukan daerah hasilnya.

41. Berapakah Daerah hasil dari fungsi f bila $f(n)$ adalah angka ke n pada deretan desimal $\frac{3}{13}$?

42. Manakah dari fungsi-fungsi berikut yang memenuhi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap x dan y di $\mathbb{R}$?

(a) $f(t) = 2t$ (b) $f(t) = t^2$

(c) $f(t) = 2t + 1$ (d) $f(t) = -3t$

43. Andaikan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap x dan y dan $\mathbb{R}$. Buktikan bahwa ada bilangan m sedemikian rupa sehingga $f(t) = mt$ untuk setiap bilangan rasional t. ***Petunjuk:*** **Pertama-tama tetapkan m itu apa, kemudian lanjutkan secara bertahap mulai dengan $f(0) = 0$, $f(p) = mp$ untuk p di $\mathbb{N}$, $f(1/p) = m/p$ dan seterusnya.**

2.2 Operasi pada Fungsi

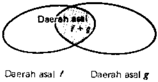
Fungsi bukanlah bilangan. Tetapi seperti halnya dua bilangan a dan b dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah bilangan baru $a + b$, demikian juga dua fungsi f dan g dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah fungsi baru $f + g$. Ini baru salah satu dari beberapa operasi pada fungsi yang akan dijelaskan dalam pasal ini.

JUMLAH, SELISIH, HASILKALI, HASILBAGI, PANGKAT. Pandanglah fungsi-fungsi f dan g dengan rumus-rumus

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

Kita dapat membuat sebuah fungsi baru $f + g$ dengan cara memberikan pada x nilai $(x - 3)/2 + \sqrt{x}$ – yakni,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-3}{2} + \sqrt{x}$$



GAMBAR 1

Tentu saja kita harus sedikit hati-hati mengenai daerah asal. Jelas x harus berupa sebuah bilangan pada mana f maupun g berlaku. Dengan lain perkataan, daerah asal $f + g$ adalah irisan (bagian irisan (bagian bersama) dari daerah asal f dan g (Gambar 1).

Fungsi-fungsi $f - g$, $f \cdot g$, dan f/g diperkenalkan dengan cara yang analog. Dengan anggapan bahwa f dan g mempunyai daerah asal mula, kita mempunyai yang berikut.

Rumus	Daerah asal
$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \dfrac{x-3}{2} + \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \dfrac{x-3}{2} - \sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \dfrac{x-3}{2}\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x-3}{2\sqrt{x}}$	$(0, \infty)$

Kita harus mengecualikan 0 dari daerah asal f/g untuk menghindari pembagian oleh 0.

Kita juga boleh memangkatkan suatu fungsi. Dengan f^n, kita maksudkan fungsi yang memberikan nilai $[f(x)]^n$ pada x. Jadi

$$f^2(x) = [f(x)]^2 = \left[\frac{x-3}{2}\right]^2 = \frac{x^2 - 6x + 9}{4}$$

dan

$$g^3(x) = [g(x)]^3 = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$$

Ada pengecualian pada aturan ini, yaitu $n = -1$. Simbol f^{-1} kita cadangkan untuk keperluan lainnya (fungsi invers) yang akan dijelaskan dalam Pasal 7.2. Jadi, f^{-1} bukan berarti $1/f$.

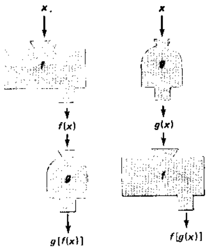
CONTOH 1. Andaikan $F(x) = \sqrt[4]{x+1}$ dan $G(x) = \sqrt{9 - x^2}$, dengan masing-masing daerah asal natural $[-1,\infty)$ dan $[-3,3]$. Cari rumus untuk $F + G, F - G, F \cdot G, F/G$, dan F^5 dan berikan daerah asal naturalnya.

Penyelesaian

Rumus	Daerah asal
$(F+G)(x) = F(x) + G(x) = \sqrt[4]{x+1} + \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F-G)(x) = F(x) - G(x) = \sqrt[4]{x+1} - \sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$(F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x) = \sqrt[4]{x+1}\sqrt{9-x^2}$	$[-1, 3]$
$\left(\frac{F}{G}\right)(x) = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt{9-x^2}}$	$[-1, 3)$
$F^5(x) = [F(x)]^5 = (\sqrt[4]{x+1})^5 = (x+1)^{5/4}$	$[-1, \infty)$

■

KOMPOSISI FUNGSI. Sebelumnya, anda diminta untuk membayangkan sebuah fungsi sebagai sebuah senapan. Sekarang anda diminta memikirkan fungsi f sebagai sebuah mesin. Fungsi ini menerima x sebagai masukan, bekerja pada x, dan menghasilkan $f(x)$ sebagai keluaran. Dua mesin seringkali dapat diletakkan berdampingan untuk membuat sebuah mesin yang lebih rumit; demikian juga halnya dengan dua fungsi f dan g (Gambar 2). Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan $f(x)$ dan kemudian g bekerja pada $f(x)$ untuk menghasilkan $g(f(x))$, dikatakan bahwa kita telah *menyusun* g dengan f. Fungsi yang dihasilkan, disebut **komposit** g dengan f, dinyatakan oleh $g \circ f$. Jadi,



GAMBAR 2

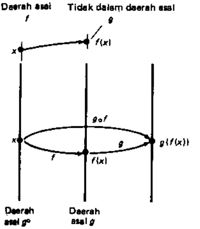
$$\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$$

Ingat kembali contoh kita yang terdahulu, $f(x) = (x-3)/2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Kita dapat menyusunnya dalam dua cara,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Segera kita perhatikan satu hal: Susunan (komposisi) fungsi tidak komutatif; $g \circ f$ dan $f \circ g$ umumnya berlainan. Anda seharusnya tidak terlalu terkejut dengan ini. Jika anda membuka baju lalu mandi, maka anda akan memperoleh hasil yang agak berbeda dibandingkan dengan melakukan dua operasi ini dalam urutan yang berlawanan.



GAMBAR 3

Kita juga harus hati-hati dalam menguraikan daerah asal suatu fungsi komposit. Daerah asal $g \circ f$ adalah bagian dari daerah asal f (yakni, nilai-nilai x itu) untuk mana g dapat menerima $f(x)$ sebagai masukan. Dalam contoh kita, daerah asal $g \circ f$ adalah $[3, \infty)$, **karena x harus lebih besar atau sama** dengan 3 agar memberikan suatu bilangan tak negatif $(x - 3)/2$ untuk dikerjakan oleh g. Diagram dalam Gambar 3 memberikan pandangan lain mengenai hal ini.

CONTOH 2. Andaikan $f(x) = 6x/(x^2 - 9)$ dan $g(x) = \sqrt{3x}$. Pertama, cari $(f \circ g)(12)$; kemudian cari $(f \circ g)(x)$ dan berikan daerah asalnya.

Penyelesaian

$$(f \circ g)(12) = f(g(12)) = f(\sqrt{36}) = f(6) = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{3x})$$

$$= \frac{6\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2 - 9} = \frac{6\sqrt{3x}}{3x - 9} = \frac{2\sqrt{3x}}{x - 3}$$

Daerah asal $f \circ g$ adalah $[0, 3) \cup (3, \infty)$. (Ingat kembali bahwa $\cup$ menyatakan operasi gabungan pada himpunan). Perhatikan bahwa 3 dikecualikan dari daerah asal untuk menghindari pembagian oleh 0. ■

Dalam kalkulus, kita akan seringkali perlu mengambil suatu fungsi yang diketahui dan mendekomposisinya – yaitu, memecahnya menjadi potongan-potongan komposit. Biasanya ini dapat dilakukan dalam beberapa cara. Misalnya, ambil $p(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. Kita dapat memikirkannya sebagai

$$p(x) = g(f(x)) \quad \text{dengan} \quad g(x) = \sqrt{x} \quad \text{dan} \quad f(x) = x^2 + 4$$

atau sebagai

$$p(x) = g(f(x)) \quad \text{dengan} \quad g(x) = \sqrt{x + 4} \quad \text{dan} \quad f(x) = x^2$$

CONTOH 3. Tuliskan fungsi $p(x) = (x + 2)^5$ sebagai sebuah fungsi komposit $g \circ f$

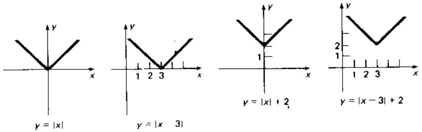
Penyelesaian. Cara yang paling mudah untuk melakukannya adalah menuliskan

$$p(x) = g(f(x)) \quad \text{dengan} \quad g(x) = x^5 \quad \text{dan} \quad f(x) = x + 2$$ ■

TRANSLASI. Dengan mengamati bagaimana sebuah fungsi dibentuk dari yang lebih sederhana dapat sangat membantu dalam penggambaran grafik. Mungkin ada pertanyaan: Bagaimana grafik-grafik dari

$$y = f(x) \qquad y = f(x-3) \qquad y = f(x) + 2 \qquad y = f(x-3) + 2$$

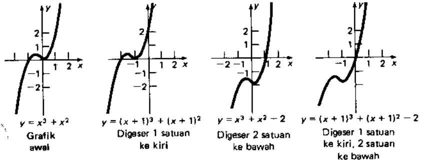
berkaitan satu sama lain? Ambillah $f(x) = |x|$ sebagai contoh, Keempat grafik yang bersangkutan diperagakan dalam Gambar 4.



GAMBAR 4

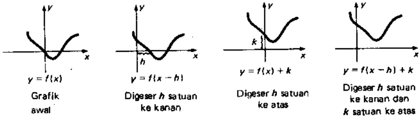
Apa yang terjadi dengan $f(x) = |x|$ adalah khas. Perhatikan bahwa keempat grafik tersebut mempunyai bentuk sama; tiga yang terakhir hanyalah penggeseran (translasi) dari yang pertama. Dengan mengganti x oleh $x - 3$ akan menggeser grafik itu 3 satuan ke kanan; dengan menambahkan 2 berarti menggesernya ke atas sebesar 2 satuan.

Gambar 5 memberikan ilustrasi lain dari prinsip ini untuk fungsi $f(x) = x^3 + x^2$.



GAMBAR 5

Prinsip yang sama secara tepat berlaku dalam situasi yang umum. Ini diilustrasikan dalam Gambar 6.

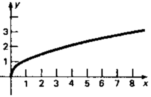


GAMBAR 6

Jika $h < 0$, maka penggeserannya ke kiri; jika $k < 0$, penggeserannya ke bawah.

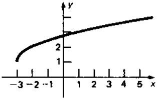
CONTOH 4. Buatlah sketsa grafik $g(x) = \sqrt{x+3} + 1$ dengan mula-mula menggambarkan grafik $f(x) = \sqrt{x}$ dan kemudian melakukan penggeseran-penggeseran seperlunya.

Penyelesaian. Grafik dari g (Gambar 8) dapat anda peroleh dengan menggeser grafik dari f (Gambar 7) 3 satuan ke kiri dan 1 satuan ke atas.



$y = f(x) = \sqrt{x}$

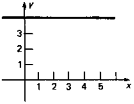
GAMBAR 7



$y = g(x) = \sqrt{x+3} + 1$

GAMBAR 8

KATALOG SEBAGIAN DARI FUNGSI. Sebuah fungsi berbentuk $f(x) = k$, dengan k konstanta (bilangan riil) disebut **fungsi konstan**. Grafiknya berupa sebuah garis mendatar (Gambar 9). Fungsi $f(x) = x$ disebut **fungsi identitas**. Grafiknya berupa sebuah garis yang melalui titik asal dengan tanjakan* 1 (Gambar 10). Dari fungsi-fungsi sederhana ini, kita dapat membangun banyak fungsi-fungsi kalkulus yang penting.



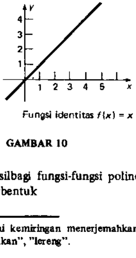
Fungsi konstan $f(x) = 4$

GAMBAR 9

Sebarang fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas dengan memakai operasi penambahan, pengurangan, dan perkalian disebut **fungsi polinom**. Ini sama saja dengan mengatakan bahwa f adalah fungsi polinom jika berbentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dengan koefisien-koefisien a berupa bilangan riil dan n adalah bilangan bulat tak negatif. Jika $a_n \neq 0$, maka n adalah derajat dari fungsi polinom. Khususnya, $f(x) = ax + b$ adalah fungsi derajat satu, atau **fungsi linear**, dan $f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah fungsi derajat dua, atau **fungsi kuadrat**.



Fungsi identitas $f(x) = x$

GAMBAR 10

Hasilbagi fungsi-fungsi polinom disebut fungsi rasional. Jadi f adalah **fungsi rasional** jika berbentuk

*)Di sini kemiringan menerjemahkan pengertian "slope"; para penulis lain ada yang menggunakan "tanjakan", "lereng".

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

Sebuah **fungsi aljabar eksplisit** adalah fungsi yang dapat diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas melalui lima operasi penambahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan penarikan akar. Contohnya adalah

$$f(x) = 3x^{2/5} = 3\sqrt[5]{x^2} \qquad g(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x}}{x^3 + \sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Fungsi-fungsi yang didaftarkan sedemikian jauh, bersama-sama dengan fungsi-fungsi trigonometri, invers trigonometri, eksponen, dan logaritma (akan diperkenalkan nanti) merupakan bahan baku untuk kalkulus.

SOAL-SOAL 2.2

1. Untuk $f(x) = x/(x-1)$ dan $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, carilah tiap nilai (jika mungkin).

(a) $(f+g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(0)$
(c) $(g/f)(3)$ (d) $(f \circ g)(0)$
(e) $(f \circ g)(\sqrt{8})$ (f) $(g \circ f)(0)$

2. Untuk $f(x) = x^2 + x$ dan $g(x) = 2/(x+3)$, carilah tiap nilainya.

(a) $(f-g)(2)$ (b) $(f/g)(1)$
(c) $g^2(3)$ (d) $(f \circ g)(1)$
(e) $(g \circ f)(1)$ (f) $(g \circ g)(3)$

3. Jika $f(x) = x^3 + 2$ dan $g(x) = 2/(x-1)$, cari rumus untuk masing-masing berikut dan nyatakan daerah asalnya. (Lihat Contoh 1 dan 2)

(a) $(f+g)(x)$ (b) $(g/f)(x)$
(c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(g \circ f)(x)$

4. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = 2/x$, cari rumus-rumus untuk yang berikut dan nyatakan daerah asalnya.

(a) $(f \cdot g)(x)$ (b) $f^4(x) + g^4(x)$
(c) $(f \circ g)(x)$ (d) $(g \circ f)(x)$

5. Jika $f(x) = \sqrt{x-4}$ dan $g(x) = |x|$, cari rumus-rumus untuk $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$.

6. Jika $g(x) = x^2 + 1$, cari rumus untuk $g^3(x)$ dan $(g \circ g \circ g)(x)$.

C 7. Hitung $f(3, 12)$ jika $f(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+x}}{1+x^3}\right)^5$.

C 8. Hitung $g(2, 03)$ jika $g(x) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^4}{1 - x + x^2}$

C 9. Hitung $\sqrt{f^2(3.46) + 4f(3.46)}$ jika $f(x) = 1/x$.

C 10. Hitung $[g^3(\pi) - g(\pi)]^{1/3}$ jika $g(x) = 6x - 11$.

11. Cari f dan g sedemikian sehingga $F = g \circ f$. (Lihat Contoh 3).

(a) $F(x) = \sqrt{x+7}$ (b) $F(x) = (x^2 + x)^{15}$

12. Cari f dan g sedemikian sehingga $p = f \circ g$.

(a) $p(x) = \dfrac{2}{(x^2 + x + 1)^3}$

(b) $p(x) = \log(x^3 + 3x)$

13. Tuliskan $p(x) = \log\sqrt{x^2 + 1}$ sebagai suatu komposit dari tiga fungsi dalam dua cara yang berbeda.

14. Tuliskan $p(x) = \log\sqrt{x^2 + 1}$ sebagai suatu komposit dari empat fungsi.

15 Sketsakan grafik dari $f(x) = \sqrt{x-2} - 3$ dengan pertama-tama mensketsakan $g(x) = \sqrt{x}$. (lihat Contoh 4).

16. Sketsakan grafik dari $g(x) = |x + 3| - 4$ dengan pertama-tama mensketsakan $h(x) = |x|$ dan kemudian dengan menggeserkan.

17. Sketsakan grafik dari $f(x) = (x - 2)2 - 4$ dengan memanfaatkan penggeseran.

18. Sketsakan grafik dari $g(x) = (x + 1)^3 - 3$ dengan memanfaatkan penggeseran.

19. Sketsakan grafik dari $f(x) = (x - 3)/2$ dan $g(x) = \sqrt{x}$ memakai sistem koordinat sama. Kemudian sketsakan $f + g$ dengan penambahan ordinat.

20. Ikuti petunjuk dari Soal 19 untuk $f(x) = x$ dan $g(x) = |x|$.

21. Sketsakan grafik dari $F(t) = |t|/t$.

22. Sketsakan grafik dari $G(t) = t - [\![t]\!]$.

23. Nyatakan apakah masing-masing yang berikut berupa suatu fungsi ganjil, suatu fungsi genap, atau tidak satu pun. Buktikan pernyataan anda.

(a) Jumlah dua fungsi genap.
(b) Jumlah dua fungsi ganjil.
(c) Hasilkali dua fungsi genap.
(d) Hasilkali dua fungsi ganjil.
(e) Hasilkali sebuah fungsi genap dengan sebuah fungsi ganjil.

24. Andaikan F fungsi sebarang yang daerah asalnya memuat $-x$ bilamana ia memuat x. Buktikan masing-masing yang berikut.

(a) $F(x) - F(-x)$ menentukan suatu fungsi ganjil.
(b) $F(x) + F(-x)$ menentukan suatu fungsi genap.
(c) F selalu dapat dinyatakan sebagai jumlah suatu fungsi ganjil dan genap.

25. Klasifikasikan masing-masing yang berikut sebagai suatu *FP* (fungsi polinom), *FR* (fungsi rasional tetapi bukan suatu fungsi (polinom), atau *FA* (fungsi aljabar eksplisit tetapi bukan *FP* ataupun *FR*).

(a) $f(x) = 3x^{1/2} + 1$ (b) $f(x) = 3$
(c) $f(x) = 3x^2 + 2x^{-1}$ (d) $f(x) = \pi x^3 - 3\pi$
(e) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ (f) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 3}}$

26. Ikuti petunjuk dari Soal 25 untuk tiap fungsi.

(a) $g(x) = 1 - 3x + x^{52}$
(b) $g(x) = (1 + 5x)^{-2}$
(c) $g(x) = (1 + 5x)^{-1/2}$
(d) $g(x) = x^{-2} + 2x^{-1} + 3$
(e) $g(x) = x + \sqrt{x}$
(f) $g(x) = \left(\dfrac{1}{x + 2}\right)^{-2}$

$\boxed{C}$ **27.** Hubungan antara biaya satuan P (dalam rupiah) untuk suatu barang tertentu dengan permintaan D (dalam ribuan unit) ternyata memenuhi

$$P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$$

Di lain pihak, permintaan telah meningkat selama t tahun sejak 1970 menurut $D = 2 + \sqrt{t}$.

(a) Nyatakan P sebagai suatu fungsi t.
(b) Hitung P bilamana $t = 15$.

28. Setelah berkecimpung dalam bisnis selama x tahun, seorang pengusaha traktor membuat $100 + x + 2x^2$ buah tiap tahun. Harga penjualan (dalam ribuan rupiah) tiap buahnya telah meningkat sesuai dengan rumus $P = 500 + 6x$. Tuliskan rumus untuk pendapatan tahunan pengusaha tersebut $R(x)$ setelah x tahun.

29. Dimulai pada tengah hari, pesawat A terbang ke arah barat dengan kecepatan 400 mil/jam. Satu jam kemudian, pesawat B terbang ke arah timur dengan kecepatan 300 mil/jam. Dengan mengabaikan kelengkungan bumi dan dengan menganggap kedua pesawat terbang pada ketinggian sama, cari rumus untuk $D(t)$, jarak antara dua pesawat tersebut t jam setelah tengah hari. *Petunjuk:* Akan terdapat dua rumus untuk $D(t)$, satu jika $0 \leq t \leq 1$, yang lainnya jika $t > 1$.

$\boxed{C}$ **30.** Cari jarak antara pesawat-pesawat dari Soal 29 pada pukul 14.30.

31. Andaikan $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - a}$. Buktikan bahwa $f(f(x)) = x$ dengan $a^2 + bc \neq 0$ dan $x \neq a/c$.

32. Andaikan $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$. Buktikan bahwa $f(f(f(x))) = x$, dengan $x \neq \pm 1$.

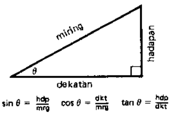
33. Andaikan $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Tentukan dan sederhanakan tiap harga.
(a) $f(1/x)$ (b) $f(f(x))$ (c) $f(1/f(x))$

34. Andaikan $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1/x$, $f_3(x) = 1-x$, $f_4(x) = 1/(1-x)$, $f_5(x) = (x-1)/x$, dan $f_6(x) = x/(x-1)$. Perhatikan bahwa $f_3(f_4(x)) = f_3(1/(1-x)) = 1-1/(1-x) = x/(x-1) = f_6(x)$, yaitu, $f_3 \circ f_4 = f_6$. Sebenarnya, komposisi dari setiap dua fungsi ini adalah fungsi lainnya seperti dalam daftar. Isilah tabel komposisi pada Gambar 11.

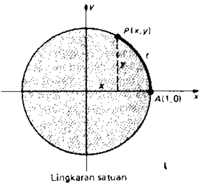
$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3				f_6		
f_4						
f_5						
f_6						

GAMBAR 11

2.3 Fungsi Trigonometri



GAMBAR 1



GAMBAR 2

Kita anggap pembaca telah belajar trigonometri dan akrab dengan definisi-definisi fungsi trigonometri berdasar sudut-sudut dan segitiga siku-siku. Kita ingatkan pembaca tiga dari definisi-definisi ini dalam Gambar 1. Jangan lupakan mereka. Tetapi di sini kita lebih tertarik kepada fungsi trigonometri yang berdasar pada lingkaran satuan. Bilamana ditinjau dalam cara ini, daerah asalnya berupa himpunan bilangan riil bukannya himpunan sudut-sudut.

Andaikan C adalah lingkaran satuan – yaitu, lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ berpusat di titik asal dengan radius 1 (Gambar 2). Nyatakan titik $(1,0)$ oleh A dan andaikan t sebarang bilangan positif. Maka terdapat tepat satu titik $P(x, y)$ pada C sedemikian sehingga panjang busur $\widehat{AP}$, yang diukur menurut arah *berlawanan dengan putaran jarum jam* dari A sepanjang lingkaran satuan adalah t. Keliling C adalah 2π; sehingga jika $t > 2\pi$, diperlukan lebih dari satu putaran lengkap dari lingkaran satuan untuk menelusuri busur $\widehat{AP}$. Jika $t = 0, P = A$.

Demikian juga jika $t < 0$, maka Anda akan memperoleh persis satu titik $P(x, y)$ pada lingkaran satuan itu, sehingga dengan demikian bila Anda mengukurnya *searah putaran jarum jam* pada C, maka panjang busur $\widehat{AP}$ adalah t. Jadi, dengan sebarang bilangan riil t, kita dapat menyesuaikannya dengan sebuah titik unik $P(x, y)$. Ini memungkinkan kita membuat definisi kunci dari sinus (sin) dan kosinus (cos).

Definisi

Andaikan t menentukan titik $P(x, y)$ seperti ditunjukkan di atas. Maka

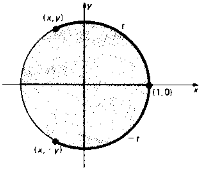
$$\sin t = y \qquad \cos t = x$$

SIFAT-SIFAT DASAR SINUS DAN KOSINUS. Beberapa kenyataan segera jelas kelihatan dari definisi yang baru saja diberikan. Pertama, x dan y bervariasi antara -1 dan 1, sehingga

$$|\sin t| \le 1 \qquad |\cos t| \le 1$$

Karena t dan $t + 2\pi$ menentukan titik $P(x, y)$ yang sama,

$$\sin(t + 2\pi) = \sin t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

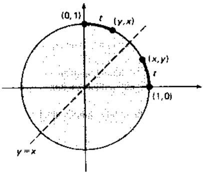


GAMBAR 3

Dikatakan bahwa sinus dan kosinus periodik dengan periode 2π. Secara lebih umum, suatu fungsi f dikatakan **periodik** jika terdapat suatu bilangan positif p sedemikian sehingga $f(t + p) = f(t)$ untuk semua t dalam daerah asal f. Dan bilangan p terkecil yang memenuhi disebut **periode** f.

Titik-titik P yang berpadanan dengan t dan $-t$ simetri terhadap sumbu x (Gambar 3), sehingga koordinat x-nya sama dan koordinat y-nya hanya berbeda tanda. Akibatnya,

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$$



GAMBAR 4

Dalam perkataan lain, sinus adalah fungsi ganjil sedangkan kosinus adalah fungsi genap.

Titik-titik P yang berpadanan dengan t dan $\pi/2 - t$ simetri terhadap garis $y = x$ (Gambar 4), sehingga koordinat-koordinatnya saling bertukar. Ini berarti bahwa

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$$

t	$\sin t$	$\cos t$
0	0	1
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$
$\pi/2$	1	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
π	0	-1

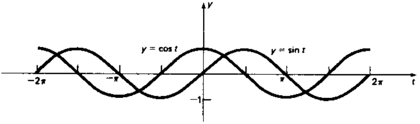
GAMBAR 5

Akhirnya, kita sebutkan sebuah kesamaan penting yang menghubungkan fungsi-fungsi sinus dan kosinus.

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1}$$

Kesamaan ini muncul dari kenyataan bahwa $y^2 + x^2 = 1$ pada lingkaran satuan.

GRAFIK SINUS DAN KOSINUS. Untuk menggambarkan grafik $y = \sin t$ dan $y = \cos t$, kita ikuti prosedur baku kita (buat tabel nilai, rajah titik-titik yang berpadanan, dan hubungkan titik-titik ini dengan lengkungan mulus). Tetapi bagaimana kita membuat sebuah tabel nilai? Untunglah orang lain telah mengerjakannya untuk kita. Tabel untuk sinus dan kosinus telah tersedia. Salah satu tabel yang demikian adalah Tabel II dari Apendiks; tabel ringkas untuk bilangan khusus diperlihatkan dalam Gambar 5. Dengan bantuan tabel-tabel ini atau dari komputasi memakai kalkulator (dalam mode radian, kita dapat menggambarkan grafik dalam Gambar 6.



GAMBAR 6

Bahkan dengan pengamatan sekilas saja seseorang dapat melihat empat hal tentang grafik-grafik ini:

1. Sin t dan cos t keduanya berkisar dari -1 sampai 1.
2. Kedua grafik berulang dengan sendirinya pada selang yang berdampingan sepanjang 2π.
3. Grafik $y = \sin t$ simetri terhadap titik asal dan $y = \cos t$ terhadap sumbu y.
4. Grafik $y = \sin t$ sama seperti $y = \cos t$, tetapi digeser $\pi/2$ satuan ke kanan.

Tidak ada yang mengherankan di sini. Ini merupakan tafsiran secara grafik dari empat rumus dalam kotak yang pertama dari alinea sebelumnya.

EMPAT FUNGSI TRIGONOMETRI LAINNYA. Kita dapat lewat cukup dengan sinus dan kosinus saja, tetapi penting juga untuk memperkenalkan empat fungsi trigonometri tambahan: tangen, kotangen, sekan, dan kosekan.

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \csc t = \frac{1}{\sin t}$$

Apa-apa yang diketahui tentang sinus dan kosinus secara otomatis akan memberikan kita pengetahuan tentang empat fungsi baru ini.

CONTOH 1. Buktikan bahwa tangen adalah fungsi ganjil.

Penyelesaian

$$\tan(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t \qquad \blacksquare$$

CONTOH 2. Periksa kebenaran kesamaan-kesamaan berikut.

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

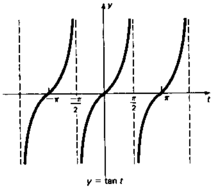
Penyelesaian

$$1 + \tan^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} = \sec^2 t$$

$$1 + \cot^2 t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t} = \csc^2 t \qquad \blacksquare$$

Berikut ini digambarkan grafik fungsi tangen (Gambar 7). Di sini kita dihadapkan pada dua kejutan kecil.

Pertama, kita perhatikan bahwa terdapat asimtot-asimtot tegak (vertikal) pada $-3\pi/2$, $-\pi/2$, $\pi/2$, $3\pi/2$, dan seterusnya. Kita seharusnya sudah menduga hal ini, karena pada nilai-nilai t ini $\cos t = 0$, yang berarti bahwa $(\sin t)/(\cos t)$ menyangkut suatu pembagian oleh nol. Kedua, kelihatan bahwa tangen adalah periode (yang kita perkirakan) tetapi



GAMBAR 7

dengan periode (yang mungkin tidak kita duga). Anda akan melihat alasan analitis untuk ini dalam Soal 19.

HUBUNGAN DENGAN TRIGONOMETRI SUDUT. Sudut biasanya diukur dalam derajat atau dalam radian. Sudut yang berpadanan terhadap satu putaran penuh berukuran 360°, tetapi hanya 2π radian. Demikian pula, sudut lurus berukuran 180° atau π radian, kenyataan yang bermanfaat untuk diingat

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ radian} \approx 3{,}1415927 \text{ radian}}$$

Ini menuju pada konversi biasa yang diperlihatkan dalam Gambar 8 dan kepada fakta-fakta berikut.

$$1 \text{ radian} \approx 57{,}29578^\circ \qquad 1^\circ \approx 0{,}0174533 \text{ radian}$$

Pembagian suatu putaran menjadi 360 bagian dilakukan demikian saja (menurut bangsa Babylon kuno, yang menyenangi kelipatan 60). Pembagian ke dalam 2π bagian adalah lebih mendasar dan berlatar belakang pada pemakaian ukuran radian yang umum dalam kalkulus. Khususnya, perhatikan bahwa panjang busur s dari potongan busur sebuah lingkaran radius r dengan sudut pusat t radian memenuhi (lihat Gambar 9)

$$\frac{s}{2\pi r} = \frac{t}{2\pi}$$

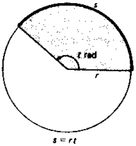
Yakni,

$$\boxed{s = rt}$$

Bilamana $r = 1$, ini memberikan $s = t$. Dengan kalimat, *panjang busur pada potongan lingkaran satuan dengan sudut pusat t radian adalah t.* Ini benar walaupun jika t negatif, asalkan kita menafsirkan panjang adalah negatif bilamana diukur dalam arah putaran jarum jam.

Derajat	Radian
0	0
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
120	$2\pi/3$
135	$3\pi/4$
150	$5\pi/6$
180	π

GAMBAR 8



GAMBAR 9

CONTOH 3. Cari jarak yang ditempuh oleh sebuah sepeda dengan roda yang mempunyai radius 30 sentimeter bila roda itu berputar sampai 100 putaran.

Penyelesaian. Kita pakai rumus dalam kotak, dengan mengenali bahwa 100 putaran berpadanan dengan $100.(2\pi)$ radian.

$$s = (30)(100)(2\pi) = 6000\pi$$
$$\approx 18849{,}6 \text{ sentimeter}$$ ■

Sekarang kita dapat membuat hubungan antara trigonometri sudut dan trigonometri lingkaran satuan. Jika θ adalah sudut yang berukuran t radian (Gambar 10), maka

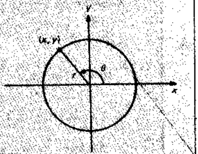
$$\boxed{\sin\theta = \sin t \qquad \cos\theta = \cos t}$$

Dalam kalkulus, bilamana kita menemui sebuah sudut yang diukur dalam derajat, kita hampir selalu mengubahnya ke dalam radian sebelum melakukan perhitungan. Misalnya,

$$\sin 31{,}6^\circ = \sin\left(31{,}6 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ radian}\right) \approx \sin(0{,}552)$$

TINJAUAN LAINNYA

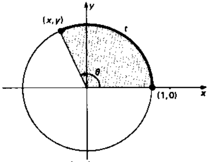
Pembahasan kita mengenai trigonometri didasarkan pada lingkaran satuan (yaitu lingkaran dengan jari-jari 1 satuan). Kita dapat pula mempergunakan lingkaran dengan jari-jari r.



Maka

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$



$\sin\theta = \sin t = y$
$\cos\theta = \cos t = x$

GAMBAR 10

CONTOH 4. Cari cos 51,8°

Penyelesaian. Prosedur yang paling sederhana adalah menekan tombol yang tepat pada kalkulator. Tetapi jika ingin memakai Tabel II dari Apendiks, pertama kita ubah 51,8° ke radian.

$$51{,}8^\circ = 51{,}8\left(\frac{\pi}{180}\right) \approx 0{,}904 \text{ radian}$$

Jadi,

$$\cos(51{,}8^\circ) \approx \cos(0{,}904) \approx 0{,}6184$$ ■

RINGKASAN KESAMAAN-KESAMAAN PENTING. Kita tidak akan menghabiskan halaman untuk memeriksa kebenaran semua kesamaan trigonometri. Kita cukup menegaskan kebenarannya dan menekankan bahwa kebanyakan dari kesamaan ini akan diperlukan di suatu tempat dalam buku ini.

Kesamaan Trigonometri

Kesamaan ganjil-genap	*Kesamaan ko fungsi*
$\sin(-x) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos(-x) = \cos x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\tan(-x) = -\tan x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

Kesamaan Pythagoras

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Kesamaan penambahan

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Kesamaan sudut-ganda

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Kesamaan setengah-sudut

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Kesamaan jumlah

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

Kesamaan hasilkali

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x + y) - \cos(x - y)]$

$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)]$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

SOAL-SOAL 2.3

1. Konversikan yang berikut ke radian (gunakan π dalam jawaban anda).

(a) $240°$ & kali $\frac{\pi}{180}$ (b) $-60°$
(c) $-135°$ (d) $540°$
(e) $600°$ (f) $720°$
(g) $18°$ (h) $22{,}5°$
(i) $6°$

2. Konversikan ukuran radian berikut menjadi derajat.

(a) $\frac{7\pi}{6}$ & kalikan 57,29 (b) $\frac{-\pi}{3}$

(c) 8π (d) $\frac{5\pi}{4}$

(e) $\frac{3\pi}{2}$ (f) $\frac{-11\pi}{12}$

(g) $\frac{\pi}{18}$ (h) $\frac{7\pi}{4}$

(i) $\frac{-\pi}{5}$

C 3. Konversikan yang berikut menjadi radian ($1° = \pi/180$ radian).

(a) $33{,}3°$ (b) $471{,}5°$
(c) $-391{,}4°$ (d) $14{,}9°$
(e) $4{,}02°$ (f) $-1{,}52°$

C 4. Konversikan ukuran radian berikut menjadi derajat (1 radian $= 180/\pi$ derajat).

(a) 1,51 (b) $-3{,}1416$
(c) 2,31 (d) 34,25
(e) $-0{,}002$

C 5. Hitunglah (yakinkan bahwa kalkulator anda dalam mode radian).

(a) $\sin(0{,}452)$ (b) $\cos(0{,}452)$
(c) $\tan(0{,}452)$ (d) $\sin(-0{,}361)$
(e) $\cos(-0{,}361)$ (f) $\tan(-0{,}361)$

6. Gunakan Tabel II dari Apendiks untuk mencari tiap nilai.

(a) $\sin(1{,}23)$ (b) $\cos(0{,}63)$
(c) $\tan(1{,}55)$ (d) $\sin(-1{,}23)$
(e) $\cos(-0{,}63)$

C 7. Hitung

(a) $\dfrac{234{,}1\sin(1{,}56)}{\cos(0{,}34)}$

(b) $\sin^2(2{,}51) + \sqrt{\cos(0{,}51)}$

C 8. Hitung

(a) $\dfrac{56{,}3\tan 34{,}2°}{\sin 56{,}1°}$

(b) $\left(\dfrac{\sin 35°}{\sin 26° + \cos 26°}\right)^3$

9. Hitung tanpa memakai kalkulator.

(a) $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ (b) $\sec(\pi)$

(c) $\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)$

(e) $\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (f) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

10. Hitung tanpa memakai kalkulator.

(a) $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$

(c) $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (d) $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)$

(e) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (f) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

11. Periksa kebenaran kesamaan berikut (lihat Contoh 2).

(a) $(1 + \sin z)(1 - \sin z) = \dfrac{1}{\sec^2 z}$

(b) $(\sec t - 1)(\sec t + 1) = \tan^2 t$

(c) $\sec t - \sin t \tan t = \cos t$

(d) $\dfrac{\sec^2 t - 1}{\sec^2 t} = \sin^2 t$

(e) $\cos t(\tan t + \cot t) = \csc t$

12. Periksa bahwa yang berikut ini adalah kesamaan.

(a) $\dfrac{\sin u}{\csc u} + \dfrac{\cos u}{\sec u} = 1$

(b) $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

(c) $\sin t(\csc t - \sin t) = \cos^2 t$

(d) $\dfrac{1 - \csc^2 t}{\csc^2 t} = \dfrac{-1}{\sec^2 t}$

(e) $\dfrac{1}{\sin t \cos t} - \dfrac{\cos t}{\sin t} = \tan t$

13. Sketsakan grafik-grafik yang berikut pada $[-\pi, 2\pi]$.

(a) $y = \sec t$ (b) $y = 3 \sin t$

(c) $y = \sin 2t$ (d) $y = \sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$

14. Sketsakan grafik-grafik yang berikut pada $[-\pi, 2\pi]$

(a) $y = \csc t$ (b) $y = 2 \cos t$

(c) $y = \cos 3t$ (d) $y = \cos\left(t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

15. Cari kuadran tempat akan terletaknya titik $P(x, y)$ untuk tiap t di bawah, dan dengan demikian tentukan tanda dari $\cos t$. *Petunjuk:* Lihat definisi lingkaran satuan untuk $\cos t$.

(a) $t = 5{,}97$ (b) $t = 9{,}34$
(c) $t = -16{,}1$

16. Ikuti petunjuk Soal 15 untuk menentukan tanda dari $\tan t$.
(a) $t = 4{,}34$ (b) $t = -15$
(c) $t = 21{,}9$

17. Yang mana dari antara yang berikut adalah fungsi ganjil? Fungsi genap? Tidak salah satu?

(a) $\sec t$ (b) $\csc t$
(c) $t \sin t$ (d) $x \cos x$
(e) $\sin^2 x$ (f) $\sin x + \cos x$

18. Cari kesamaan-kesamaan yang analog terhadap kesamaan penambahan untuk tiap pernyataan.

(a) $\sin(x - y)$ (b) $\cos(x - y)$
(c) $\tan(x - y)$

19. Gunakan kesamaan penambahan untuk tangen guna membuktikan bahwa $\tan(t + \pi) = \tan t$ untuk semua t dalam daerah asal dari $\tan t$.

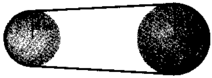
20. Buktikan bahwa $\cos(x - \pi) = -\cos x$ untuk semua x.

21. Cari panjang busur sebuah lingkaran radius 2,5 sentimeter yang dipotong oleh tiap sudut pusat (lihat Contoh 3).
(a) 6 radian (b) $225°$

22. Seberapa jauh sebuah roda radius 2 kaki menggelinding sepanjang permukaan tanah dalam membuat 150 putaran? (Lihat Contoh 3).

[C] 23. Andaikan sebuah ban pada sebuah mobil mempunyai garis tengah luar 2,5 kaki. Berapa putaran tiap menit yang dibuat oleh ban bilamana mobil meluncur pada kecepatan 60 mil/jam?

[C] 24. Sebuah tali kipas melingkari dua roda, seperti diperlihatkan dalam Gambar 11. Berapa banyak putaran yang dilakukan tiap detik oleh roda yang kecil bilamana roda yang besar membuat 21 putaran tiap detik?



GAMBAR 11

25. Sekarung jagung 50 kg ditarik sepanjang lantai oleh seorang yang lengannya membuat sudut t radian dengan lantai. Gaya F (dalam kg) yang diperlukan diberikan oleh

$$F(t) = \frac{50\mu}{\mu \sin t + \cos t}$$

Di sini μ adalah konstanta yang berhubungan dengan gesekan yang terjadi. Cari F dalam tiap kasus.

(a) $t = \dfrac{\pi}{4}$ (b) $t = 0$
[C] (c) $t = 1$ (d) Sudut adalah 90.

26. **Sudut inklinasi** α dari sebuah garis adalah sudut positif terkecil dari sumbu-x positif ke garis tersebut ($\alpha = 0$ untuk sebuah garis mendatar). Buktikan bahwa kemiringan m dari garis sama dengan $\tan \alpha$.

27. Carilah sudut inklinasi dari garis-garis berikut (lihat Soal 26).

(a) $y = \sqrt{3}x - 7$ (b) $\sqrt{3}x + 3y = 6$

28. Andaikan l_1 dan l_2 adalah dua garis tidak tegak masing-masing dengan kemiringan m_1 dan m_2. Jika θ adalah sudut dari l_1 ke l_2 bukan sudut siku-siku, maka

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

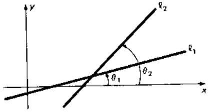
Buktikan ini dengan memakai fakta bahwa $\theta = \theta_2 - \theta_1$ dalam Gambar 12.

[C] 29. Carilah sudut (dalam radian) dari garis pertama ke garis kedua (lihat Soal 28).

(a) $y = 2x, \quad y = 3x$

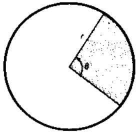
(b) $y = \dfrac{x}{2}, \quad y = -x$

(c) $2x - 6y = 12, \quad 2x + y = 0$



GAMBAR 12

30. Turunkan rumus $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ untuk luas sektor lingkaran. Di sini r adalah radius dan θ adalah sudut pusat dalam ukuran radian (lihat Gambar 13).



GAMBAR 13

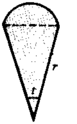
31. Cari luas sektor lingkaran dengan radius 5 sentimeter dan sudut pusat 2 radian (lihat Gambar 30).

32. Andaikan ruji sebuah roda dengan radius 2 kaki berputar 10 kali dalam satu detik. Cari luas yang diliput oleh ruji selama $\frac{1}{40}$ detik; selama 3 detik.

33. Suatu piringan hitam dengan $33\frac{1}{3}$ rpm memiliki galur berbentuk spiral yang dimulai 6 inci dari pusatnya dan berakhir 3 inci dari pusatnya. Apabila piringan hitam itu dapat main dalam 18 menit, berapakah kira-kira panjang galur tersebut?

34. Sebuah poligon Regular n sisi dimasukkan dalam lingkaran dengan radius r. Carilah rumus untuk parameter P, dan luas dari poligon tersebut dalam suku n dan r.

35. Sebuah segitiga samakaki ditutup oleh setengah lingkaran seperti tampak dalam Gambar 14. Tentukanlah suatu rumus luas A untuk seluruh gambar sebagai fungsi dari sisi r dan sudut puncak t (radian).



GAMBAR 14

36. Dari suatu perkalian identitas, kita peroleh

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} = \tfrac{1}{2}[\cos\tfrac{3}{4}x + \cos\tfrac{1}{4}x]$$

Tentukan rumus yang sesuai untuk

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}$$

Apakah Anda menemukan bentuk umumnya?

2.4 Pendahuluan Limit

Topik yang dibahas sedemikian jauh merupakan bagian dari apa yang disebut *prakalkulus*. Topik ini menyediakan dasar-dasar untuk kalkulus, tetapi ini bukan kalkulus. Sekarang kita siap untuk suatu gagasan baru yang penting, yaitu pengertian *limit*. Gagasan inilah yang membedakan kalkulus dari cabang-cabang matematika lainnya. Memang, kita dapat mendefinisikan kalkulus sebagai *pengkajian tentang limit*.

Tentu saja, perkataan *limit* dipergunakan dalam bahasa sehari-hari seperti misalnya seseorang berkata, "Saya mendekati batas kesabaran saya." Pemakaian yang demikian mempunyai hubungan dengan kalkulus, tetapi tidak banyak.

PEMAHAMAN SECARA INTUISI. Pandang fungsi yang ditentukan oleh rumus

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Perhatikan bahwa fungsi tersebut tidak terdefinisikan pada $x = 1$ karena di titik ini $f(x)$ berbentuk $\frac{0}{0}$, yang tanpa arti. Tetapi kita masih dapat menanyakan apa yang terjadi pada $f(x)$ bilamana x mendekati 1. Secara lebih tepat, apakah $f(x)$ mendekati beberapa bilangan tertentu bilamana x mendekati 1? Untuk sampai pada pertanyaan ini, kita telah melakukan tiga hal. Kita telah menghitung beberapa nilai $f(x)$ untuk x dekat 1, kita telah menunjukkan nilai-nilai ini dalam sebuah diagram skematis, dan kita telah mensketsakan grafik $y = f(x)$ (Gambar 1).

x	$y = \frac{x^3-1}{x-1}$
1,25	3,813
1,1	3,310
1,01	3,030
1,001	3,003
↓	↓
1,000	?
↑	↑
0,999	2,997
0,99	2,970
0,9	2,710
0,75	2,313

Tabel nilai

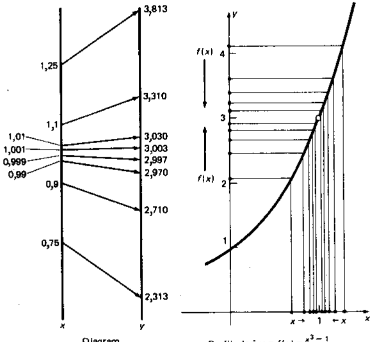


Diagram skematis

Grafik dari $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

GAMBAR 1

Semua informasi yang telah kita rakit kelihatannya menunjuk ke kesimpulan yang sama: $f(x)$ mendekati 3 bilamana x mendekati 1. Dalam lambang matematis, kita tuliskan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Ini dibaca "limit dari $(x^3 - 1)/(x - 1)$ untuk x mendekati 1 adalah 3."

Dengan menjadi seorang ahli aljabar yang baik (jadi mengetahui bagaimana menguraikan selisih pangkat tiga), kita dapat menyediakan fakta-fakta yang lebih banyak dan lebih baik.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3.$$

Perhatikan bahwa $(x - 1)/(x - 1) = 1$ selama $x \neq 1$. Ini membenarkan langkah yang kedua.

Agar yakin bahwa kita berada pada jalur yang benar, kita perlu mempunyai pengertian yang jelas tentang arti perkataan *limit*. Berikut percobaan kita yang pertama pada sebuah definisi.

> ***Definisi***
>
> **(Pengertian limit secara intuisi).** **Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi berlainan dari c, maka $f(x)$ dekat ke L.**

Perhatikan bahwa kita tidak mensyaratkan sesuatu agar tepat benar di c. Fungsi f bahkan tidak perlu terdefinisi di c, juga tidak dalam contoh $f(x) = (x^3 - 1)/(x - 1)$ yang baru saja ditinjau. Pemikiran tentang limit dihubungkan dengan perilaku suatu fungsi dekat c, bukannya di c.

Pembaca yang kritis pasti menentang penggunaan perkataan *dekat*. Apa sebenarnya makna *dekat?* Seberapa dekat adalah dekat? Untuk jawab-jawab yang persis, beberapa contoh lebih lanjut akan membantu memperjelas pemikiran tersebut.

LEBIH BANYAK CONTOH-CONTOH. Contoh pertama kita kelihatannya remeh, tetapi penting.

CONTOH 1. Cari $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$

Penyelesaian. Bilamana x dekat 3; maka $4x - 5$ dekat terhadap $4 \cdot 3 - 5 = 7$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

■

CONTOH 2. Cari $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$.

Penyelesaian. Perhatikan bahwa $(x^2 - x - 6)/(x - 3)$ tidak terdefinisi di $x = 3$, tetapi itu tidak apa. Untuk mendapatkan gagasan tentang apa yang terjadi bilamana x mendekati 3, kita dapat memakai kalkulator untuk menghitung ungkapan yang diberikan, misalnya di 3,1; 3,01; 3,001, dan seterusnya. Tetapi adalah jauh lebih baik memakai aljabar sedikit untuk menyederhanakan persoalan.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x - 3)(x + 2)}{x - 3} = \lim_{x\to 3} (x + 2) = 3 + 2 = 5$$

Dengan mencoret $x - 3$ dalam langkah kedua adalah sahih karena definisi limit itu akan mengabaikan perilakunya di sebelah kiri $x = 3$. Jadi, kita tidak membaginya dengan 0. ■

CONTOH 3. Cari $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Penyelesaian.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x} + 1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

■

CONTOH 4. Cari $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

Penyelesaian. Kita tidak menemukan muslihat yang akan menyederhanakan tugas itu secara aljabar, tentu saja kita tidak dapat mencoret x. Kalkulator akan menolong kita memperoleh bayangan tentang nilai itu. Gunakanlah kalkulator anda sendiri (mode radian) untuk memeriksa nilai-nilai dalam tabel dari Gambar 2. Kesimpulan kita—walaupun kita akui tidak cukup kuat—adalah bahwa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Kita akan memberikan suatu demonstrasi yang cermat dalam Pasal 3.4. ■

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
1,0	0,84147
0,5	0,95885
0,1	0,99833
0,01	0,99998
↓	↓
0	?
↑	↑
−0,01	0,99998
−0,1	0,99833
−0,5	0,95885
−1,0	0,84147

GAMBAR 2

BEBERAPA TANDA PERINGATAN Ternyata keadaannya tidak semudah apa yang kelihatan. Kalkulator mungkin mengecohkan kita, demikian juga dengan intuisi kita. Contoh-contoh berikut mengetengahkan beberapa jebakan yang mungkin.

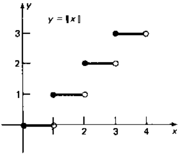
CONTOH 5 **(Kalkulator anda mungkin membodohi anda).** Cari $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 - \dfrac{\cos x}{10.000}\right]$

x	$x^2 - \frac{\cos x}{10000}$
± 1	0,99995
$\pm 0,5$	0,24991
$\pm 0,1$	0,00990
$\pm 0,01$	0,000000005
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

GAMBAR 3

Penyelesaian. Dengan mengikuti prosedur yang digunakan sebelumnya, kita susun tabel nilai yang diperlihatkan dalam Gambar 3. Kesimpulan yang disarankannya adalah bahwa limit yang diinginkan adalah 0. Tetapi itu salah. Jika kita ingat kembali grafik $y = \cos x$, kita sadari bahwa $\cos x$ mendekati 1 untuk x mendekati 0. Jadi,

$$\lim_{x \to 0}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10.000}\right] = 0^2 - \frac{1}{10.000} = -\frac{1}{10.000} \qquad \blacksquare$$



GAMBAR 4

CONTOH 6. (Tidak ada limit pada suatu lompatan). Cari $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$

Penyelesaian. Ingat kembali bahwa $[\![x]\!]$ menyatakan bilangan bulat terbesar dalam x (lihat Pasal 2.1). Grafik $y = [\![x]\!]$ diperihatkan dalam Gambar 4. Untuk semua bilangan x yang lebih kecil dari 2 tetapi dekat 2, $[\![x]\!] = 1$, tetapi untuk semua bilangan x yang lebih besar dari 2, $[\![x]\!] = 2$. Apakah $[\![x]\!]$ dekat pada suatu bilangan L bilamana x dekat 2? Tidak. Betapapun bilangan yang kita usulkan untuk L, akan terdapat nilai-nilai x yang sebarang dekat ke 2 pada satu pihak atau pihak lainnya, dengan $[\![x]\!]$ berbeda dari L sebesar paling sedikit $\frac{1}{2}$. Kesimpulan kita adalah bahwa $\lim\limits_{x \to 2} [\![x]\!]$ tidak ada. Jika anda memeriksa kembali, anda akan melihat bahwa kita tidak menuntut bahwa setiap limit yang dapat kita tuliskan harus ada. $\blacksquare$

CONTOH 7. (Terlalu banyak goyangan). Cari $\lim\limits_{x \to 0} \sin(1/x)$

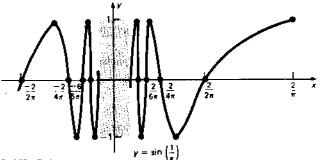
Penyelesaian. Contoh ini mengetengahkan pertanyaan paling rumit yang ditanyakan tentang limit. Karena kita tidak ingin membuat cerita yang terlalu besar untuknya, anda diminta melakukan dua hal. Pertama, ambil sebarisan nilai-nilai x yang men-

x	$\sin\frac{1}{x}$
$2/\pi$	1
$2/2\pi$	0
$2/3\pi$	-1
$2/4\pi$	0
$2/5\pi$	1
$2/6\pi$	0
$2/7\pi$	-1
$2/8\pi$	0
$2/9\pi$	1
$2/10\pi$	0
$2/11\pi$	-1
$2/12\pi$	0
$\downarrow$	$\downarrow$
0	?

GAMBAR 5

dekati 0. Gunakan kalkulator anda untuk menghitung $\sin(1/x)$ pada semua nilai x ini. Terkecuali anda menemukan beberapa pilihan beruntung, maka nilai-nilai anda akan berayun secara liar.

Kedua, cobalah menggambarkan grafik $y = \sin(1/x)$. Tak seorang pun akan pernah melakukan ini dengan sangat baik, tetapi tabel nilai dalam Gambar 5 memberikan kita suatu petunjuk yang baik tentang apa yang terjadi. Di sekitar titik asal, grafik bergoyang ke atas dan ke bawah di antara -1 dan 1 banyak kali secara tak terhingga (Gambar 6). Jelas $\sin(1/x)$ tidak berada dekat suatu bilangan unik L bilamana x dekat 0. Kita simpulkan bahwa $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ tidak ada. ■



GAMBAR 6

LIMIT-LIMIT SEPIHAK. Bilamana suatu fungsi mempunyai lompatan (seperti halnya $[\![x]\!]$ pada setiap bilangan bulat, dalam Contoh 6), maka limit tidak ada pada setiap titik lompatan. Untuk fungsi-fungsi yang demikian, adalah wajar untuk memperkenalkan limit-limit sepihak. Andaikan lambang $x \to c^+$ berarti bahwa x mendekati c dari kanan, dan andaikan $x \to c^-$ berarti bahwa x mendekati c dari kiri.

Definisi

(Limit-kiri dan limit-kanan). Untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kanan c, maka $f(x)$ adalah dekat ke L. Serupa, untuk mengatakan bahwa $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ berarti bahwa bilamana x dekat tetapi pada sebelah kiri c, maka $f(x)$ adalah dekat ke L.

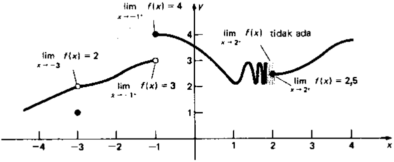
Jadi walaupun $\lim_{x\to 2} [\![x]\!]$ tidak ada, adalah benar untuk menuliskan (lihat grafik dalam Contoh 6)

$$\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!] = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} [\![x]\!] = 2$$

Kami yakin anda akan melihat bahwa teorema berikut sangat beralasan.

> ***Teorema A***
>
> $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$.

Gambar 7 seharusnya memberikan pandangan tambahan yang jelas bagi Anda.



GAMBAR 7

No genap

SOAL-SOAL 2.4

Dalam Soal-soal 1 – 6, cari limit yang ditunjukkan dengan pemeriksaan.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x - 8)$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2}{x} + 1\right)$
3. $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 3x + 1)$
4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{9 + x^2}}{x - 3}$
5. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\frac{\sqrt{12 - x^2}}{x^4}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x - x^2}{x^2 + 2x - 4}$

Dalam Soal-soal 7 – 16, cari limit yang ditunjukkan. Dalam banyak hal, akan bijaksana untuk melakukan beberapa perhitungan aljabar terlebih dahulu (lihat Contoh 2 dan 3).

7. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$
8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$
9. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 - 16x}{x^2 + 4x}$
11. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$
12. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x - 2}$
13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$
14. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2 + 4x - 4}{x - 3}$
15. $\lim\limits_{t\to 2}\frac{t^2 - 5t + 6}{t^2 - t - 2}$
16. $\lim\limits_{u\to 1}\frac{u^2 + 6u - 7}{u^2 - 1}$

Dalam Soal-soal 17 – 26, gunakan kalkulator (atau Tabel II) untuk menghitung nilai-nilai dari fungsi yang diberikan dekat titik limit c. Susun nilai-nilai ini dalam sebuah tabel (seperti dalam Contoh 4, 5, dan 7) dan gunakan hasil-hasil tersebut untuk mencari limit yang disyaratkan atau menyimpulkan bahwa limit tersebut tidak ada. Yakinkan untuk memasang kalkulator dalam kode radian.

$\boxed{C}$ 17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x}$

$\boxed{C}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x}$

$\boxed{C}$ 19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}$

$\boxed{C}$ 20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2}$

$\boxed{C}$ 21. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t^2}$

$\boxed{C}$ 22. $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t}$

$\boxed{C}$ 23. $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1 + \cos x}{\sin 2x} \cdot \frac{2x}{x}$

$\boxed{C}$ 24. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

C 25. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin 3x}{x - 1}$

C 26. $\lim\limits_{u \to \pi/2} \dfrac{\tan u}{u}$

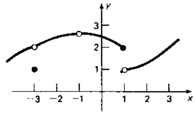
27. Untuk fungsi f yang digambarkan grafiknya dalam Gambar 8, cari limit yang ditunjukkan atau nilai fungsi, atau nyatakan bahwa limit tersebut tidak ada.

(a) $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$ (b) $f(-3)$

(c) $f(-1)$ (d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

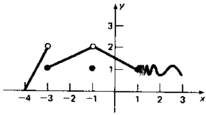
(e) $f(1)$ (f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

(g) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ (h) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$



GAMBAR 8

28. Ikuti petunjuk dari Soal 27 untuk fungsi f yang digambar grafiknya dalam Gambar 9.



GAMBAR 9

29. Sketsakan grafik dari

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \leq 0 \\ x & \text{jika} \quad 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & \text{jika} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Kemudian cari masing-masing yang berikut atau nyatakan jika tidak ada.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (b) $f(1)$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

30. Sketsakan grafik dari

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{jika} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{jika} \quad 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{jika} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Kemudian cari masing-masing yang berikut atau nyatakan jika tidak ada.

(a) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ (b) $g(1)$

(c) $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x)$

31. Sketsakan grafik $f(x) = x - [\![x]\!]$; kemudian cari masing-masing yang berikut atau nyatakan jika tidak ada.

(a) $f(0)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x \to 1/2} f(x)$

32. Ikuti petunjuk Soal 31 untuk $f(x) = x/|x|$.

33. Cari $\lim\limits_{x \to 1}(x^2 - 1)/|x - 1|$ atau nyatakan jika tidak ada.

34. Hitung $\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x + 3} - \sqrt{3})/x$. *Petunjuk:* Rasionalisasikan pembilang.

35. Andaikan

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \text{ rasional} \\ -x & \text{jika } x \text{ tak rasional} \end{cases}$$

Cari masing-masing nilai, jika mungkin

(a) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

36. Sketsakan, yang terbaik yang anda dapat lakukan, grafik fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut.

(a) Daerah asalnya adalah selang $[0,4]$.

(b) $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ (d) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

(e) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$ (f) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$

37. **Diketahui**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{bila } x \text{ rasional} \\ x^4 & \text{bila } x \text{ tak rasional} \end{cases}$$

Untuk harga a berapakah $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada?

38. Fungsi $f(x) = x^2$ telah digambar dengan teliti. Akan tetapi pada malam hari seorang tamu misterius mengubah nilai-nilai dari f pada satu juta tempat yang berbeda. Apakah ini mempengaruhi nilai dari $\lim_{x \to a} f(x)$ untuk setiap a? Jelaskan.

39. Tentukan limit-limit berikut ini atau berilah keterangan bahwa limit tersebut tidak ada.

(a) $\lim_{x \to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$ (b) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$

(c) $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - |x-1| - 1}{|x-1|}$

(d) $\lim_{x \to 1^-} \left[\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{|x-1|}\right]$

40. Tentukan limit-limit berikut atau berilah keterangan bahwa limit tersebut tidak ada.

(a) $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - [\![x]\!]}$ (b) $\lim_{x \to 0^+} [\![1/x]\!]$

(c) $\lim_{x \to 0^+} x(-1)^{[\![1/x]\!]}$ (d) $\lim_{x \to 0^+} [\![x]\!](-1)^{[\![1/x]\!]}$

(e) $\lim_{x \to 0^+} x[\![1/x]\!]$ (f) $\lim_{x \to 0^+} x^2[\![1/x]\!]$

2.5 Pengkajian Mendalam Tentang Limit

Anda seharusnya tidak percaya begitu saja pada apa yang diceritakan kepada anda. Adalah bijaksana untuk bersikap ragu-ragu — asal saja tidak keterlaluan sehingga anda tidak akan mempercayai apa pun, bersikaplah sepantasnya untuk tidak menerima suatu pernyataan sebelum anda memeriksanya. Katakan kepada seorang matematikawan bahwa sesuatu adalah benar dan kemungkinan anda akan mendapat tanggapan: Buktikan. Tetapi untuk dapat membuktikan sesuatu haruslah kita memahami arti kata-kata yang digunakan sejelas-jelasnya. Terutama yang menyangkut **kata** ***limit***, karena kalkulus semuanya bersandar pada arti dari kata tersebut.

Dalam pasal sebelumnya telah diberikan definisi limit secara tak formal. Berikut definisi yang lebih baik sedikit, tetapi masih tetap tak formal, dengan menyusun kembali susunan kata-kata dari definisi tersebut. *Untuk mengatakan bahwa* $\lim_{x \to c} f(x) = L$ *berarti bahwa selisih antara* $f(x)$ *dan* L *dapat dibuat sekecil mungkin dengan mensyaratkan bahwa* x *cukup dekat tetapi tidak sama dengan* c. Sekarang kita coba untuk menekankan hal ini dengan mengemukakan bukti-bukti.

MEMBUAT DEFINISI PERSIS. Pertama, kita ikuti sebuah tradisi panjang dalam memakai huruf Yunani ε (epsilon) dan δ (delta) untuk menggantikan bilangan-bilangan kecil positif. Bayangkanlah ε dan δ sebagai bilangan-bilangan kecil positif.

Mengatakan bahwa $f(x)$ berbeda dari L lebih kecil dari ε sama saja dengan mengatakan

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

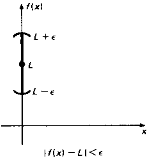
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

Ini berarti bahwa $f(x)$ terletak dalam selang terbuka $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ seperti yang diperlihatkan pada grafik dalam Gambar 1.

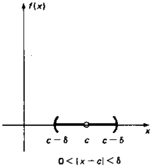
Selanjutnya, ucapan bahwa x cukup dekat tetapi berlainan dengan c sama saja dengan mengatakan bahwa untuk suatu δ, x terletak dalam selang terbuka $(c - \delta, c + \delta)$ dengan c tidak diikutkan. Barangkali cara terbaik untuk mengatakan ini adalah dengan menuliskan

$$0 < |x - c| < \delta$$

Perhatikan bahwa $|x - c| < \delta$ akan memerikan selang $c - \delta < x < c + \delta$, sedangkan $0 < |x - c|$ mensyaratkan bahwa $x = c$ dikecualikan. Selang dengan pengecualian yang diuraikan tersebut diperlihatkan dalam Gambar 2.



GAMBAR 1



GAMBAR 2

Kita siap untuk definisi yang menurut sementara orang disebut definisi yang terpenting dalam kalkulus.

Definisi

(Pengertian persis tentang limit). Mengatakan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan (betapapun kecilnya), terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan bahwa $0 < |x - c| < \delta$; yakni,

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

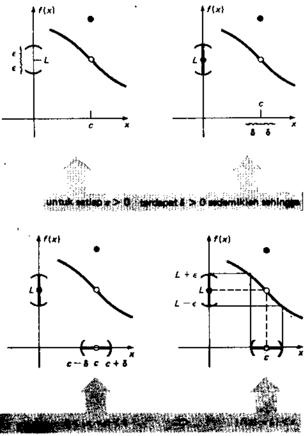
Gambar-gambar dalam Gambar 3 dapat kiranya membantu anda menyerap definisi ini.

Harus ditekankan bahwa pertama-tama diberikan bilangan ε; bilangan δ harus dihasilkan. Andaikan Anton ingin membuktikan kepada Bety bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Bety dapat menantang Anton dengan suatu ε tertentu yang dipilihnya (misalnya, $\varepsilon = 0{,}00001$) dan meminta Anton menghasilkan δ yang berpadanan.

Lebih lanjut, karena definisi mengatakan "untuk tiap $\varepsilon > 0$" (bukannya "untuk suatu $\varepsilon > 0$"), Anton belum membuktikan pernyataan limit itu jika ia menghasilkan δ untuk satu ε tertentu, bahkan juga tidak untuk beberapa dari ε. Ia harus mampu menghasilkan δ untuk tiap sebuah ε yang berpadanan. Tentu saja, δ yang dihasilkan mungkin tergantung pada ε. Secara umum, makin kecil ε yang diberikan Bety, makin kecil δ yang perlu dikembalikan Anton.

Apakah terdapat suatu cara yang mungkin bahwa Anton dapat memenuhi tantangan yang demikian? Ada, tetapi jangan mengharapkan ini begitu mudah.

BEBERAPA BUKTI LIMIT (FAKULTATIF). Dalam tiap contoh-contoh berikut, kita mulai dengan apa yang disebut analisis pendahuluan. Ini bukan bagian dari bukti melain-



GAMBAR 3

kan lebih merupakan pekerjaan yang seharusnya anda kerjakan di kertas buram. Kami sertakan di sini agar bukti-bukti kita tidak kelihatan begitu saja turun dari langit.

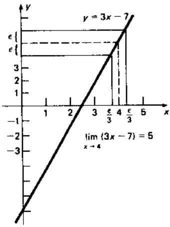
CONTOH 1 Buktikan bahwa $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$.

ANALISIS PENDAHULUAN. Andaikan ε bilangan positif sebarang. Kita harus menghasilkan suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

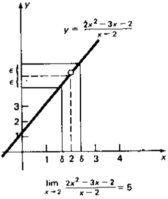
$$0 < |x - 4| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Pandang ketaksamaan di sebelah kanan

$$\begin{aligned} |(3x - 7) - 5| < \varepsilon \quad &\Leftrightarrow \quad |3x - 12| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |3(x - 4)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |3||x - 4| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad |x - 4| < \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$



GAMBAR 4



GAMBAR 5

Sekarang kita lihat bagaimana memilih δ, yakni $\delta = \varepsilon/3$. Tentu saja, sebarang δ yang lebih kecil akan memenuhi.

BUKTI FORMAL. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon/3$. Maka $0 < |x - 4| < \delta$ membawakan

$$|(3x - 7) - 5| = |3x - 12| =$$

$$|3(x - 4)| = 3|x - 4| < 3\delta = \varepsilon$$

Jika anda baca rangkaian pertaksamaan dan sebuah kesamaan ini dari kiri ke kanan dan gunakan hukum transitif, anda lihat bahwa

$$|(3x - 7) - 5| < \varepsilon$$

Jika Bety menantang Anton dengan $\varepsilon = 0{,}01$ dalam contoh ini, Anton akan menanggapi dengan $\delta = 0{,}01/3 = 0{,}0033$. Jika Bety mengatakan $\varepsilon = 0{,}000003$, Anton akan mengatakan $\delta = 0{,}000001$. Jika ia memberikan δ yang lebih kecil lagi, akan lebih baik.

Tentu saja, jika anda pikirkan grafik dari $y = 3x - 7$ (sebuah garis dengan kemiringan 3, seperti dalam Gambar 4), anda tahu bahwa untuk memaksa $3x - 7$ agar dekat ke 5, akan lebih baik membuat x sedekat mungkin (lebih dekat menurut kelipatan sepertiga) ke 4. ■

CONTOH 2. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5.$

ANALISIS PENDAHULUAN Kita mencari δ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

Sekarang untuk $x \neq 2$,

$$\left| \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left| \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |(2x + 1) - 5| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |2(x - 2)| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |2||x-2| \quad < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad |x-2| \quad < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ini menunjukkan bahwa $\delta = \varepsilon/2$ akan memenuhi (lihat Gambar 5).

BUKTI FORMAL. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon/2$. Maka $0 < |x-2| < \delta$ menyebabkan

$$\left|\frac{2x^2-3x-2}{x-2} - 5\right| = \left|\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2} - 5\right| = |2x+1-5|$$

$$= |2(x-2)| = 2|x-2| < 2\delta = \varepsilon$$

Pencoretan faktor $x-2$ sah karena $0 < |x-2|$ berarti $x \neq 2$; jadi pembagian dengan 0 dihindari. ■

CONTOH 3. Buktikan bahwa $\lim_{x \to c} (mx + b) = mc + b$.

ANALISIS PENDAHULUAN. Kita ingin mencari δ sedemikian sehingga

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(mx+b) - (mc+b)| < \varepsilon$$

Sekarang

$$|(mx+b) - (mc+b)| = |mx - mc| = |m(x-c)| = |m||x-c|$$

Kelihatan bahwa $\delta = \varepsilon/|m|$ akan memenuhi.

BUKTI FORMAL. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon/|m|$. Maka $0 < |x-c| < \delta$ menunjukkan

$$|(mx+b) - (mc+b)| = |mx - mc| = |m||x-c| < |m|\delta = \varepsilon$$

Hanya terdapat satu masalah dengan pilihan δ kita. Bagaimana jika $m = 0$? Dalam kasus demikian, sebarang δ akan memenuhi dengan baik karena

$$|(0x+b) - (0c+b)| = |0| = 0$$

Yang belakangan lebih kecil dari ε untuk semua x. ■

CONTOH 4. Buktikan bahwa jika $c > 0$, $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$.

ANALISIS PENDAHULUAN. Kita harus mencari δ sedemikian sehingga

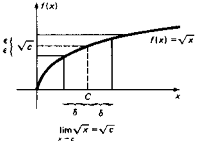
$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - \sqrt{c}| < \varepsilon$$

Sekarang

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{c})(\sqrt{x}+\sqrt{c})}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}\right|$$

$$= \frac{|x-c|}{\sqrt{x}+\sqrt{c}} \leq \frac{|x-c|}{\sqrt{c}}$$

Untuk membuat yang sebelumnya lebih kecil dari ε, kita diharuskan membuat $|x - c| < \varepsilon\sqrt{c}$ (Gambar 6).



GAMBAR 6

BUKTI FORMAL. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \varepsilon\sqrt{c}$. Maka $0 < |x - c| < \delta$ berarti

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left|\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \left|\frac{x - c}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right|$$

$$= \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \leq \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} = \varepsilon$$

■

Ada satu hal teknis lagi. Harus diingat bahwa $\delta \leq c$, untuk $|x-c| < \delta$ yang menyebabkan $x > 0$ sehingga $\sqrt{x}$ terdefinisi Jadi untuk penelaahan harga mutlak, pilih δ yang lebih kecil dari c dan $\varepsilon\sqrt{c}$.

Peragaan kita dalam Contoh 4 tergantung pada cara merasionalkan pembilang itu. Ini merupakan teknik yang seringkali sangat berguna dalam kalkulus.

CONTOH 5. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 3}(x^2 + x - 5) = 7$.

ANALISIS PENDAHULUAN. Tugas kita adalah mencari δ sedemikian sehingga

$$0 < |x - 3| < \delta \quad \Rightarrow \quad |(x^2 + x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Sekarang

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4||x - 3|$$

Karena faktor yang kedua $|x - 3|$ dapat dibuat kecil seperti yang kita inginkan, maka cukup membatasi faktor $|x + 4|$. Untuk melakukan ini, pertama kita pilih $\delta \leq 1$. Kemudian $|x - 3| < \delta$ membawakan

$$\begin{aligned} |x + 4| &= |x - 3 + 7| \\ &\leq |x - 3| + |7| \quad \text{(ketaksamaan segitiga)} \\ &< 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

GAMBAR 7

Gambar 7 menawarkan suatu alternatif peragaan dari fakta ini. Jika kita juga mensyaratkan $\delta \le \varepsilon/8$, maka hasil kali $|x + 4|\ |x - 3|$ akan lebih kecil dari ε.

BUKTI FORMAL. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\ \{1, \varepsilon/8\}$; yaitu pilih δ sebagai yang terkecil dari antara 1 dan $\varepsilon/8$. Maka $0 < |x - 3| < \delta$ berarti

$$|(x^2 + x - 5) - 7| = |x^2 + x - 12| = |x + 4|\,|x - 3| < 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

CONTOH 6. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$.

BUKTI Kita tiru bukti dalam Contoh 5. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\ \{1, \varepsilon/(1 + 2|c|)\}$. Maka $0 < |x - c| < \delta$ berarti

$$\begin{aligned} |x^2 - c^2| &= |x + c|\,|x - c| = |x - c + 2c|\,|x - c| \\ &\le (|x - c| + 2|c|)|x - c| && \text{(ketaksamaan segitiga)} \\ &< \frac{(1 + 2|c|)\cdot\varepsilon}{1 + 2|c|} = \varepsilon \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

CONTOH 7 Buktikan bahwa $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c}$, $c \ne 0$.

ANALISIS PENDAHULUAN. Kita harus mencari δ sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| < \varepsilon$$

Sekarang

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x - c|$$

Faktor $1/|x|$ menyulitkan, khususnya jika x dekat 0. Kita dapat membatasi faktor ini jika kita dapat menjauhkan x dari 0. Untuk maksud itu, perhatikan bahwa

$$|c| = |c - x + x| \le |c - x| + |x|$$

sehingga

$$|x| \ge |c| - |x - c|$$

Jadi, jika kita pilih $\delta \le |c|/2$, maka kita berhasil dalam membuat $|x| \ge |c|/2$. Akhirnya, jika kita juga mensyaratkan $\delta \le \varepsilon c^2/2$, maka

$$\frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x - c| < \frac{1}{|c|/2}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot\frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon$$

BUKTI FORMAL Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $\delta = \min\ \{|c|/2, \varepsilon c^2/2\}$ maka $0 < |x - c| < \delta$ berarti

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right| = \left|\frac{c - x}{xc}\right| = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot|x - c| < \frac{1}{|c|/2}\cdot\frac{1}{|c|}\cdot\frac{\varepsilon c^2}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

LIMIT-LIMIT SATU-PIHAK Kita tidak memerlukan banyak imajinasi untuk memberikan definisi ε, δ dari aturan limit kanan dan limit kiri.

> *Definisi*
>
> Mengatakan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$ berarti bahwa untuk tiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga
>
> $$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Kami serahkan definisi ε, δ yang berpadanan untuk limit kiri kepada pembaca.

SOAL-SOAL 2.5

Dalam Soal-soal 1-6, berikan definisi ε, δ yang sesuai untuk tiap pernyataan.

1. $\lim_{t \to a} f(t) = M$
2. $\lim_{u \to b} g(u) = L$
3. $\lim_{z \to d} h(z) = P$
4. $\lim_{y \to e} \phi(y) = B$
5. $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$
6. $\lim_{t \to a^+} g(t) = D$

Dalam Soal-soal 7-18, berikan suatu bukti ε, δ dari tiap fakta limit (lihat Contoh-contoh 1-5).

7. $\lim_{x \to 3}(5x - 11) = 4$
8. $\lim_{x \to -2}(2x - 4) = -8$
9. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$
10. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x - 1} = 7$
11. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = -5$
12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 4x}{x} = -4$
13. $\lim_{x \to 2} \sqrt{2x} = 2$
14. $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1} = 2$
15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1} = 5$. *Petunjuk:* $x^2 - 1$ adalah faktor dari pembilang.
16. $\lim_{x \to 2}(2x^2 - 4x + 3) = 3$
17. $\lim_{x \to 3}(x^2 - 2x) = 3$
18. $\lim_{x \to 0} x^4 = 0$
19. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} f(x) = M$, maka $L = M$.
20. Andaikan F dan G adalah fungsi-fungsi sedemikian sehingga $0 \leqslant F(x) \leqslant G(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \to a} G(x) = 0$ maka $\lim_{x \to c} F(x) = 0$.
21. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} x^4 \sin^2(1/x) = 0$. *Petunjuk:* Gunakan Soal-soal 18 dan 20.
22. Buktikan bahwa $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.
23. Dengan memandang limit kiri dan limit kanan, buktikan bahwa $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.
24. Buktikan bahwa jika $|f(x)| < B$ untuk $|x - a| < 1$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, maka $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.
25. Diketahui $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $f(a)$ ada (yang mungkin dapat berbeda dengan L). Buktikan bahwa f dikelilingi oleh beberapa interval yang mengandung a; arti-

nya, tunjukkan bahwa ada suatu interval (c, d) dengan $c < a < d$ dan konstanta M sehingga $|f(x)| \leqslant M$ untuk setiap x di (c, d).

26. Buktikan bahwa jika $f(x) \leqslant g(x)$ untuk setiap x dalam beberapa interval terputus adalah a dan jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$, maka $L \leqslant M$.

27. Manakah dari yang berikut ini sesuai dengan definisi limit?

(a) Untuk beberapa $\varepsilon > 0$ dan setiap $\delta > 0$, $0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

(b) Untuk setiap $\delta > 0$, terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian rupa sehingga $\varepsilon > 0$ adalah

$$0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \delta$$

(c) Untuk setiap bilangan bulat positif N, terdapat bilangan bulat positif lainnya M sedemikian rupa sehingga $0 < |x-c| < 1/M \Rightarrow |f(x)-L| < 1/N$.

(d) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga $0 < |x-c| < \delta$ dan $|f(x) - L| < \varepsilon$ sama dengan x.

28. Nyatakan dalam bahasa ε, δ apakah artinya $\lim_{x \to c} f(x) \neq L$.

2.6 Teorema Limit

Kebanyakan pembaca akan setuju bahwa membuktikan adanya limit dengan memakai definisi ε-δ dari pasal di depan, di samping memakan-waktu juga sukar. Itulah sebabnya mengapa teorema-teorema dalam pasal ini disambut dengan baik. Teorema kita yang pertama sangat penting. Dengan teorema ini kita dapat menangani hampir semua masalah limit yang akan kita hadapi nanti.

Teorema A

(Teorema Limit Utama). Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit di c. Maka

1. $\lim_{x \to c} k = k$;
2. $\lim_{x \to c} x = c$;
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$;
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$;
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$;
6. $\lim_{x \to c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$;
7. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$;
8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$;
9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap.

Hasil-hasil yang penting ini akan mudah diingat jika kita pelajari dalam kata-kata. Misalnya, Pernyataan 4 diterjemahkan sebagai: *Limit suatu jumlah adalah jumlah dari limit-limit.*

Tentu saja, Teorema A perlu dibuktikan. Kita tunda pekerjaan tersebut sampai akhir pasal ini, dengan pertama-tama memilih untuk memperlihatkan kepada anda bagaimana teorema besar ini dipakai.

PENERAPAN TEOREMA LIMIT UTAMA Dalam contoh-contoh berikut, nomor-nomor yang dilingkari mengacu kepada pernyataan-pernyataan bernomor dari daftar yang diberikan terdahulu. Setiap kesamaan dibenarkan oleh pernyataan yang ditunjuk.

CONTOH 1 Carilah $\lim_{x\to 3} 2x^4$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 \overset{3}{=} 2\lim_{x\to 3} x^4 \overset{8}{=} 2\left[\lim_{x\to 3} x\right]^4 \overset{2}{=} 2[3]^4 = 162$$ ■

CONTOH 2 Cari $\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$.

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) \overset{5}{=} \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x \overset{3}{=} 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x$$

$$\overset{8}{=} 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x \overset{2}{=} 3(4)^2 - 2(4)$$

$$= 40$$ ■

CONTOH 3 Cari $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2+9}}{x} \overset{7}{=} \frac{\lim_{x\to 4}\sqrt{x^2+9}}{\lim_{x\to 4} x} \overset{9}{\underset{2}{=}} \frac{\sqrt{\lim_{x\to 4}(x^2+9)}}{4} \overset{4}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\lim_{x\to 4} x^2 + \lim_{x\to 4} 9}$$

$$\overset{8,1}{=} \frac{1}{4}\sqrt{\left[\lim_{x\to 4} x\right]^2 + 9} \overset{2}{=} \frac{1}{4}\sqrt{4^2+9} = \frac{5}{4}$$ ■

CONTOH 4 Jika $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ dan $\lim_{x\to 3} g(x) = 8$, cari

$$\lim_{x\to 3}[f^2(x)\cdot \sqrt[3]{g(x)}]$$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 3}[f^2(x)\cdot\sqrt[3]{g(x)}] \overset{6}{=} \lim_{x\to 3} f^2(x)\cdot\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{g(x)}$$

$$\overset{8,9}{=} \left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]^2 \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} g(x)}$$

$$= [4]^2\cdot\sqrt[3]{8}$$

$$= 32 \qquad \blacksquare$$

Ingat bahwa fungsi polinom f mempunyai bentuk

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

sedangkan fungsi rasional f adalah hasil bagi dua fungsi polinom yakni

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

[illegible]

Bukti untuk Teorema B muncul dari penerapan secara berulang-ulang Teorema A. Perhatikan bahwa Teorema B memungkinkan kita untuk mencari limit-limit untuk fungsi-fungsi polinom dan rasional cukup dengan hanya menggantikan c untuk x.

CONTOH 5 Cari $\lim_{x\to 2} \dfrac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 2}\frac{7x^5 - 10x^4 - 13x + 6}{3x^2 - 6x - 8} = \frac{7(2)^5 - 10(2)^4 - 13(2) + 6}{3(2)^2 - 6(2) - 8} = -\frac{11}{2} \qquad \blacksquare$$

CONTOH 6 Cari $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3 + 3x + 7}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to 1}\dfrac{x^3 + 3x + 7}{(x-1)^2}$

Penyelesaian Baik Teorema B ataupun Pernyataan 7 dari Teorema A tidak berlaku, karena limit dari penyebut 0. Tetapi, karena limit pembilang adalah 11, kita lihat bahwa selama x dekat 1, kita membagi sebuah bilangan dekat 11 dengan sebuah bilangan positif dekat 0. Hasilnya adalah sebuah bilangan positif yang besar. Kenyataannya, bilangan yang dihasilkan dapat dibuat besar sekehendak kita dengan membiarkan x cukup dekat ke 1. Kita katakan bahwa limitnya tidak ada. (Nanti dalam buku ini – lihat Pasal 4.6 – kita bolehkan diri kita sendiri untuk mengatakan limitnya adalah $+\infty$.) ■

CONTOH 7 Cari $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6}$.

Penyelesaian Lagi-lagi, Teorema B tidak dapat diterapkan. Tetapi kali ini, hasil bagi mengambil bentuk tanpa arti 0/0 di $t = 2$. Kapan saja ini terjadi anda harus menyederhanakan hasilbagi tersebut secara aljabar (faktorisasi), sebelum anda mencoba mengambil limitnya.

$$\lim_{t\to 2} \frac{t^2 + 3t - 10}{t^2 + t - 6} = \lim_{t\to 2} \frac{(t - 2)(t + 5)}{(t - 2)(t + 3)} = \lim_{t\to 2} \frac{t + 5}{t + 3} = \frac{7}{5}$$ ■

FAKULTATIF

Berapa banyak pembuktian teorema yang harus dilakukan pada pelajaran kalkulus untuk pertama kalinya? Para pengajar matematika berdebat sengit mengenai hal ini dan juga mengenai keseimbangan antara:

- **logika dan intuisi**
- **pembuktian dan penjelasan**
- **teori dan penerapan.**

Seorang ilmuwan besar [illegible] "Seseorang yang [illegible] tahu di mana [illegible] berada".

[illegible]

BUKTI TEOREMA A (FAKULTATIF) Anda seharusnya tidak terlalu terkejut pada waktu kami mengatakan bahwa bukti-bukti beberapa bagian dari Teorema A sangat canggih. Karena hal ini, di sini kita hanya membuktikan lima bagian yang pertama, dengan mengalihkan yang lainnya ke Apendiks (Pasal A2, Teorema A). Untuk membiasakan, cobalah Soal-soal 33 dan 34.

Bukti Pernyataan 1 dan 2 Pernyataan ini merupakan hasil dari $\lim_{x\to c}(mx + b) = mc + b$ (Lihat Contoh 3 dari Pasal 2.5), pertama dengan memakai $m = 0$ dan kemudian $m = 1$, $b = 0$.

Bukti Pernyataan 3 Jika $k = 0$, hasilnya jelas, sehingga kita andaikan $k \neq 0$. Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Menurut hipotesis, $\lim_{x\to c} f(x)$ ada; sebut nilainya L. Menurut definisi limit, terdapat suatu bilangan δ sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \quad\Rightarrow\quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Seseorang pasti memrotes bahwa kita menempatkan $\varepsilon/|k|$ bukannya ε pada akhir ketaksamaan di atas. Baik, bukankah $\varepsilon/|k|$ suatu bilangan positif? Ya. Apakah definisi limit mensyaratkan bahwa untuk sebarang bilangan positif, terdapat suatu δ yang berpadanan? Ya.

Sekarang dengan telah ditetapkannya δ, kita dapat menyatakan bahwa $0 < |x - c| < \delta$ berarti

$$|kf(x) - kL| = |k||f(x) - L| < |k|\frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{x \to c} kf(x) = kL = k \lim_{x \to c} f(x) \qquad \blacksquare$$

Bukti Pernyataan 4 Andaikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = M$. Jika ε sebarang bilangan positif yang diberikan, maka $\varepsilon/2$ adalah positif. Karena $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_1 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Karena $\lim_{x \to c} g(x) = M$, terdapat suatu bilangan positif δ_2 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pilih $\delta = \min\ \{\delta_1, \delta_2\}$; yaitu pilih δ sebagai yang terkecil di antara δ_1 dan δ_2. Maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (L + M)| &= |[f(x) - L] + [g(x) - M]| \\ &\le |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Dalam rangkaian ini, ketaksamaan yang pertama adalah ketaksamaan segitiga (Pasal 1.4); yang kedua sebagai hasil dari pilihan δ. Kita baru saja memperlihatkan bahwa

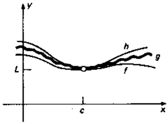
$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

Jadi

$$\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)] = L + M = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) \qquad \blacksquare$$

Bukti Pernyataan 5

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c}[f(x) - g(x)] &= \lim_{x \to c}[f(x) + (-1)g(x)] \\ &= \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c}(-1)g(x) \\ &= \lim_{x \to c} f(x) + (-1)\lim_{x \to c} g(x) \\ &= \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) \qquad \blacksquare \end{aligned}$$



GAMBAR 1

TEOREMA APIT Pernahkah anda mendengar seseorang berkata, "Saya terjebak di antara batu dan tempat yang keras?" Inilah yang terjadi pada g dalam teorema berikut (lihat Gambar 1).

Teorema C (Teorema Apit). Andaikan f, g dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

Bukti (Fakultatif) Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih δ_1 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

dan δ_2 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_3 \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Pilih δ_3 sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

Andaikan $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Maka

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Kita simpulkan bahwa $\lim_{x \to c} g(x) = L$. ■

CONTOH 8 Telah diketahui bahwa $1 - x^2/6 \leq (\sin x)/x \leq 1$ untuk semua x yang mendekati tetapi tidak 0. Apa yang dapat kita simpulkan dari ini?

Penyelesaian Andaikan $f(x) = 1 - x^2/6$, $g(x) = (\sin x)/x$, dan $h(x) = 1$. Maka $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$, sehingga menurut Teorema C

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$ ■

Kita akhiri dengan sebuah catatan penting. *Semua teorema dalam pasal ini sahih untuk limit kanan dan limit kiri.*

SOAL-SOAL 2.6

Dalam Soal-soal 1-12, gunakan Teorema A untuk mencari tiap limit. Berikan pembenaran tiap langkah dengan mengacu pada pernyataan bernomor, seperti pada Contoh-contoh 1-4.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(7x - 4)$

2. $\lim\limits_{x\to -1} (2x^3 - 5x)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2 + 1)(3x - 1)]$

4. $\lim\limits_{x\to 0}[(4x^2 - 3)(7x^3 + 2x)]$

5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x}{3x^3 - 16}$

6. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^4 - 8}{x^3 + 24}$

7. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{3x - 5}$

8. $\lim\limits_{x\to -3} \sqrt{5x^2 + 2x}$

9. $\lim\limits_{t\to -2} (2t^3 + 15)^{13}$

10. $\lim\limits_{w\to -2} \sqrt{-3w^3 + 7w^2}$

11. $\lim\limits_{y\to 2}\left(\dfrac{4y^3 + 8y}{y + 4}\right)^{1/3}$

12. $\lim\limits_{w\to 5}(2w^4 - 9w^3 + 19)^{-1/2}$

Dalam Soal-soal 13-22, cari limit yang ditunjuk atau nyatakan bahwa itu tidak ada. Dalam banyak kasus, anda ingin melakukan beberapa langkah aljabar sebelum mencoba menghitung limitnya (lihat Contoh-contoh 5-7).

13. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 7}$

14. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{14} - 3x^{11} + 2x^3 - 6}{3x^9 + 2x + 1}$

15. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 + 2x - 24}{x - 4}$

16. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 7x + 10}{x + 2}$

17. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 7x + 6}{x^2 - 4x - 5}$

18. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u^2 - 2u}{u^2 - 4}$

19. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t^2 + 7t + 7}{t^2 - 4t - 5}$

20. $\lim\limits_{u\to 2} \dfrac{u^2 - 2u + 1}{u^2 - 4}$

21. $\lim\limits_{y\to 1} \dfrac{(y - 1)(y^2 + 2y - 3)}{y^2 - 2y + 1}$

22. $\lim\limits_{w\to -2} \dfrac{(w + 2)(w^2 - w - 6)}{w^2 + 4w + 4}$

Dalam Soal-soal 23-28, cari limit-limit tersebut jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 3$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -1$ (lihat Contoh 4).

23. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$

24. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2f(x) - 3g(x)}{f(x) + g(x)}$

25. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{g(x)}[f(x) + 3]$

26. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) - 3]^4$

27. $\lim\limits_{t\to a}[f(t) + (t - a)g(t)]$

28. $\lim\limits_{u\to a}[f(u) + 3g(u)]^3$

Dalam Soal-soal 29-32, cari $\lim\limits_{x\to 2}[f(x) - f(2)]/(x - 2)$ untuk setiap fungsi f yang diberikan.

29. $f(x) = 5x^2$ 30. $f(x) = 3x^2 - 5$

31. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 32. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

33. Buktikan Pernyataan 6 dari Teorema A. *Petunjuk:*

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \\ &= |g(x)[f(x) - L] + L[g(x) - M]| \\ &\le |g(x)||f(x) - L| + |L||g(x) - M| \end{aligned}$$

Sekarang perlihatkan bahwa jika $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$, terdapat suatu bilangan δ_1, sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |g(x)| < |M| + 1$$

34. Buktikan Pernyataan 7 dari Teorema A, pertama dengan memberikan suatu bukti ε, δ bahwa $\lim_{x \to c}[1/g(x)] = 1/[\lim_{x \to c} g(x)]$ dan kemudian menerapkan Pernyataan 6.

35. Buktikan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to c}[f(x) - L] = 0$.

36. Buktikan bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to c}|f(x)| = 0$.

37. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \to c} f(x) = L > 0$, maka terdapat suatu selang $(c - \delta, c + \delta)$ sedemikian sehingga $f(x) > 0$ untuk semua x dalam $(c - \delta, c + \delta)$, $x \neq c$.

38. Buktikan bahwa $\lim_{x \to c}|x| = |c|$.

39. Cari contoh-contoh untuk membuktikan bahwa:
(a) $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)]$ ada tidak berarti bahwa salah satu $\lim_{x \to c} f(x)$ atau $\lim_{x \to c} g(x)$ ada;
(b) $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)]$ ada tidak berarti bahwa salah satu $\lim_{x \to c} f(x)$ atau $\lim_{x \to c} g(x)$ ada;

40. Buktikan bahwa jika $\lim_{x \to c}[f(x) + g(x)]$ dan $\lim_{x \to c} g(x)$ keduanya ada, maka $\lim_{x \to c} f(x)$ harus ada.

Dalam Soal-soal 41-48, cari tiap limit-kanan dan limit-kiri atau nyatakan bahwa itu tidak ada.

41. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}}{2x+1}$

42. $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2}$

43. $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2 - 9}}$

44. $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1+x}}{4+4x}$

45. $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{(x^2+1)[\![x]\!]}{(3x-1)^2}$

46. $\lim_{x \to 3^-} (x - [\![x]\!])$

47. $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$

48. $\lim_{x \to 3^+} [\![x^2 + 2x]\!]$

49. Misalkan $f(x)g(x) = 1$ untuk setiap x dan $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Buktikan bahwa $\lim_{x \to a} f(x)$ tidak ada.

50. Diketahui bujur sangkar R bersinggungan dengan titik tengah sisi-sisi dari suatu segi empat Q dengan titik-titik sudut $(\pm x, 0)$ dan $(0, \pm 1)$. Hitunglah

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\text{keliling } R}{\text{keliling } Q}$$

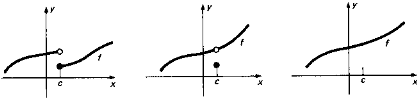
51. Diketahui $y = \sqrt{x}$ dan titik-titik M, N, O dan P berkoordinat $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$ dan (x, y). Hitunglah:

(a) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\text{keliling } \Delta NOP}{\text{keliling } \Delta MOP}$

(b) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\text{luas } \Delta NOP}{\text{luas } \Delta MOP}$

2.7 Kekontinuan Fungsi

Dalam bahasa yang biasa, kata *kontinu* digunakan untuk memerikan suatu proses yang berkelanjutan tanpa perubahan yang mendadak. Gagasan inilah, yang berkenaan dengan fungsi, yang sekarang ingin dibuat secara persis. Pandang tiga grafik yang diperlihatkan dalam Gambar 1. Hanya grafik yang ketiga memperlihatkan kekontinuan di c. Berikut adalah definisi yang formal.



$\lim_{x\to c} f(x)$ tidak ada

$\lim_{x\to c} f(x)$ ada, tetapi $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$

$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

GAMBAR 1

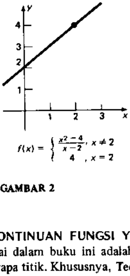
Definisi

(Kekontinuan di satu titik). Kita katakan bahwa f kontinu di c jika beberapa selang terbuka di sekitar c terkandung dalam daerah asal f dan,

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

Dengan definisi ini kita bermaksud mensyaratkan tiga hal: (1) $\lim_{x\to c} f(x)$ ada, (2) $f(c)$ ada (yakni, c berada dalam daerah asal f), dan (3) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Jika salah satu dari ketiga fungsi ini tak terpenuhi, maka f **takkontinu** (diskontinu) di c. Jadi, fungsi yang diwakili oleh grafik yang pertama dan kedua di atas takkontinu di c. Tetapi kontinu di titik-titik lain dari daerah asalnya.

CONTOH 1 Andaikan $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x \neq 2$. Bagaimana seharusnya f didefinisikan di $x = 2$ agar kontinu di titik itu?



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

GAMBAR 2

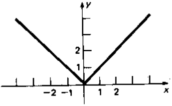
Penyelesaian

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4$$

Karena itu, kita definisikan $f(2) = 4$. Grafik dari fungsi yang dihasilkan diperlihatkan dalam Gambar 2. Kenyataannya, kita lihat bahwa $f(x) = x + 2$ untuk semua x. ■

KEKONTINUAN FUNGSI YANG DIKENAL Sebagian besar fungsi yang akan kita jumpai dalam buku ini adalah kontinu di mana-mana atau di setiap titik terkecuali di beberapa titik. Khususnya, Teorema 2.6B mencerminkan hasil berikut.

> ***Teorema A***
>
> **Fungsi polinom kontinu di setiap bilangan riil c. Fungsi rasional kontinu di setiap bilangan riil c dalam daerah asalnya, yaitu kecuali di mana penyebutnya nol.**



$f(x) = |x|$

GAMBAR 3

Ingat kembali fungsi $f(x) = |x|$; grafiknya diperlihatkan dalam Gambar 3. Untuk $x < 0$, $f(x) = -x$ adalah polinom, untuk $x > 0$, $f(x) = x$ adalah polinom lain. Jadi menurut Teorema A, $|x|$ kontinu di semua bilangan yang berlainan dengan 0. Tetapi

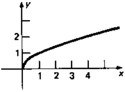
$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = |0|$$

(lihat Soal 23 dari Pasal 2.5). Karena itu, $|x|$ juga kontinu di 0; $|x|$ kontinu di mana-mana.

Menurut Teorema Limit Utama (Teorema 2.6A)

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} x} = \sqrt[n]{c}$$

asalkan $c > 0$ bilamana n genap. Ini berarti bahwa $f(x) = \sqrt[n]{x}$ kontinu di setiap titik di mana pembicaraan tentang kekontinuan masuk akal. Khususnya, $f(x) = \sqrt{x}$ kontinu di setiap bilangan riil $c > 0$ (Gambar 4). Kita ringkaskan.



$f(x) = \sqrt{x}$

GAMBAR 4

> ***Teorema B***
>
> **Fungsi nilai mutlak adalah kontinu di setiap bilangan riil c. Jika n ganjil, fungsi akar ke n kontinu di setiap bilangan riil c; jika n genap, fungsi ini kontinu di setiap bilangan riil positif c.**

KEKONTINUAN DALAM OPERASI FUNGSI Apakah operasi-operasi yang baku memelihara kekontinuan? Ya, sesuai dengan Teorema C. Di dalamnya, f dan g adalah fungsi-fungsi, k adalah konstanta, dan n adalah bilangan bulat positif.

> ***Teorema C***
>
> **Jika f dan g kontinu di c, maka demikian juga kf, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, f/g (asalkan $g(c) \neq 0$), f^n dan $\sqrt[n]{f}$ (asalkan $f(c) > 0$ jika n genap).**

Bukti Semua hasil ini merupakan akibat mudah dari fakta-fakta yang berpadanan untuk limit-limit dari Teorema 2.6A. Misalnya, teorema tersebut dikombinasikan dengan kenyataan bahwa f dan g kontinu di c, memberikan

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = f(c)g(c)$$

Ini adalah persis apa yang dimaksudkan dengan mengatakan bahwa $f \cdot g$ kontinu di c.

CONTOH 2 Pada bilangan-bilangan berapa saja $F(x)=(3|x|-x^2)/(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})$ kontinu?

Penyelesaian Kita tidak perlu memandang bilangan-bilangan tak positif, karena F tak terdefinisi di bilangan-bilangan yang demikian. Untuk setiap bilangan positif, fungsi-fungsi $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}$, $|x|$, dan x^2 semuanya kontinu (Teorema A dan B). Menyusul dari Teorema C bahwasanya $3|x|, 3|x|-x^2, \sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$, dan – akhirnya

$$\frac{(3|x| - x^2)}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$$

adalah kontinu di setiap bilangan positif. ■

Terdapat operasi fungsi lain yang akan sangat penting dalam pekerjaan nantinya, yakni komposisi. Operasi ini juga mempertahankan kekontinuan.

Teorema D

(Teorema limit komposit). Jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi komposit $f \circ g$ kontinu di c.

Kita tunda pembuktiannya sampai akhir pasal ini.

CONTOH 3 Buktikan bahwa $h(x) = |x^2 - 3x + 6|$ kontinu di setiap bilangan riil.

Penyelesaian Andaikan $f(x) = |x|$ dan $g(x) = x^2 - 3x + 6$. Keduanya kontinu di setiap bilangan riil, dan demikian juga dengan kompositnya

$$h(x) = f(g(x)) = |x^2 - 3x + 6|$$ ■

CONTOH 4 Akan diperlihatkan nanti bahwa $f(x) = \sin x$ kontinu di setiap bilangan riil. Simpulkan bahwa

$$h(x) = \sin\left(\frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}\right)$$

kontinu kecuali di 3 dan -2.

Penyelesaian $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. Jadi, fungsi rasional

$$g(x) = \frac{x^4 - 3x + 1}{x^2 - x - 6}$$

kontinu kecuali di 3 dan -2 (Teorema A). Dari Teorema D, kita simpulkan bahwa, karena $h(x) = f(g(x))$, maka h juga kontinu kecuali di 3 dan -2. ■

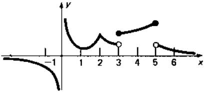
KEKONTINUAN PADA SELANG Sedemikian jauh, telah dibahas kekontinuan di suatu titik. Kita akan membahas kekontinuan pada suatu selang. Kekontinuan pada selang selayaknya berarti kekontinuan di setiap titik dari selang tersebut. Itulah tepatnya apa yang diartikan untuk suatu selang terbuka (a, b).

Bilamana kita memandang selang tertutup $[a, b]$, kita menghadapi masalah. Mungkin saja f bahkan tidak terdefinisi di sebelah kiri a (misalnya, $f(x) = \sqrt{x}$ mempunyai masalah ini di $a = 0$), sehingga secara langsung saja $\lim_{x\to a} f(x)$ tidak ada. Kita pilih untuk mengurus persoalan ini dengan menyebut f kontinu pada $[a, b]$ jika ia kontinu di setiap titik dari (a, b) dan jika $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dan $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$ (masing-masing disebut, *kekontinuan kanan* di a dan *kekontinuan kiri* di b). Kita ringkaskan dalam sebuah definisi formal.

Definisi

Kita katakan f kontinu pada selang terbuka (a, b) jika f kontinu di setiap titik (a, b). f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ jika kontinu pada (a, b), kontinu [illegible] dan kontinu kiri di b.

Sebagai contoh, pernyataan bahwa $f(x) = 1/x$ kontinu pada $(0,1)$ dan bahwa $g(x) = \sqrt{x}$ kontinu pada $[0,1]$ adalah benar.



GAMBAR 5

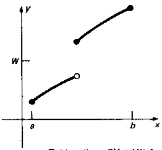
CONTOH 5 Dengan menggunakan definisi di atas, uraikan sifat-sifat kekontinuan dari fungsi yang grafiknya disketsakan dalam Gambar 5.

Penyelesaian Fungsi itu kontinu pada selang terbuka $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, dan $(5, \infty)$ dan juga pada selang tertutup $[3, 5]$. ■

Untuk f agar kontinu pada $[a, b]$ berarti bahwa bilamana x_1 dan x_2 berdekatan satu sama lain dan keduanya berada dalam $[a, b]$, maka $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ berdekatan satu sama lain. Tidak terdapat lompatan atau perubahan mendadak, sehingga kita boleh "menggambarkan" grafik f pada $[a, b]$ tanpa mengangkat pensil kita dari kertas. Ini berkaitan dengan kenyataan bahwa suatu fungsi kontinu harus menerima setiap nilai di antara dua nilainya yang sebarang. Hasil ini sekarang akan kita nyatakan secara persis.

Teorema B

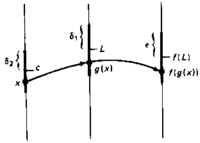
[illegible]



Takkontinu: Sifat Nilai Antara tidak berlaku

GAMBAR 6

Jelas dari grafik dalam Gambar 6 bahwa kekontinuan diperlukan untuk teorema ini. Juga kelihatan jelas bahwa kekontinuan adalah cukup, namun memang bukti formalnya ternyata sukar. Kita serahkan pembuktiannya untuk pekerjaan tingkat lanjut.



GAMBAR 7

BUKTI TEOREMA D (FAKULTATIF)

Bukti Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu di L, maka terdapat $\delta_1 > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga

$$|t - L| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(L)| < \varepsilon$$

jadi (lihat Gambar 7)

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Tetapi karena $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$, untuk suatu $\delta_1 > 0$ terdapat $\delta_2 > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - L| < \delta_1$$

Bilamana kedua kenyataan ini kita gabungkan, kita mempunyai,

$$0 < |x - c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$$

Ini menunjukkan bahwa

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f(L)$$

Pernyataan kedua dalam Teorema D menyusul dari pengamatan bahwa jika g kontinu di c, maka $L = g(c)$. ■

SOAL-SOAL 2.7

Dalam Soal-soal 1-14, nyatakan apakah fungsi yang ditunjukkan kontinu atau tidak di 2: jika takkontinu jelaskan sebabnya.

1. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$

2. $f(x) = \dfrac{8}{x - 2}$

3. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x - 2}$

4. $g(x) = \sqrt{x-1}$

5. $h(x) = \sqrt{x-3}$

6. $h(x) = |3 - 5x^2|$

7. $f(t) = [\![t]\!]$

8. $f(t) = [\![t - \frac{1}{2}]\!]$

9. $g(t) = \dfrac{t^3 - 8}{t - 2}$

10. $g(t) = \dfrac{4t - 8}{t - 2}$

11. $h(t) = \begin{cases} \dfrac{t^3 - 8}{t - 2} & \text{jika } t \neq 2 \\ 12 & \text{jika } t = 2 \end{cases}$

12. $h(t) = \begin{cases} \dfrac{4t - 8}{t - 2} & \text{jika } t \neq 2 \\ 2 & \text{jika } t = 2 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{jika } x < 2 \\ x^2 + 1 & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$

14. $f(x) = \begin{cases} -3x + 4 & \text{jika } x \leq 2 \\ -2 & \text{jika } x > 2 \end{cases}$

Dalam Soal-soal 15-20, fungsi yang diberikan tidak terdefinisi di suatu titik tertentu. Bagaimana seharusnya mendefinisikannya di sana agar kontinu pada titik itu? (Lihat Contoh 1).

15. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

16. $g(x) = \dfrac{9x^2 - 4}{3x + 2}$

17. $f(t) = \dfrac{t - 1}{\sqrt{t} - 1}$

18. $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

19. $\phi(x) = \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x + 1}$

20. $F(x) = \sin\left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 1}\right)$

Dalam Soal-soal 21-32, di titik-titik mana, jika ada, fungsi takkontinu?

21. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 - x - 6}$

22. $g(x) = \dfrac{x}{2x^2 - x - 1}$

23. $f(t) = |t^2 - 2t + 5|$

24. $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t - 1}}$

25. $f(u) = \dfrac{2u + 7}{\sqrt{u + 5}}$

26. $g(u) = \dfrac{u^2 + |u - 1|}{\sqrt[3]{u + 1}}$

27. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 + x^2}}$

28. $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

29. $f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x < 0 \\ x^2 & \text{jika } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{jika } x > 1 \end{cases}$

30. $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } x < 0 \\ -x & \text{jika } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{jika } x > 1 \end{cases}$

31. $f(t) = [\![t]\!]$

32. $g(t) = [\![t + \frac{1}{2}]\!]$

33. Sketsakan grafik suatu fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut.

(a) Daerah asalnya adalah $[-2, 2]$.
(b) $f(-2) = f(-1) = f(1) = f(2) = 1$.
(c) Takkontinu di -1 dan 1.
(d) Kontinu kanan di -1 dan kontinu kiri di 1.

34. Andaikan

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{jika } x \text{ rasional} \\ -x & \text{jika } x \text{ tak rasional} \end{cases}$$

Sketsakan grafik fungsi ini sebaik mungkin dan tentukan di mana fungsi kontinu?

35. Gunakan teorema Nilai Antara untuk membuktikan bahwa $x^3 + 3x - 2 = 0$ mempunyai akar riil antara 0 dan 1.

36. Perlihatkan bahwa persamaan $x^5 + 4x^3 - 7x + 14 = 0$ mempunyai paling sedikit satu akar riil. *Petunjuk:* Teorema Nilai Antara.

37. Buktikan bahwa f kontinu di c jika dan hanya jika $\lim_{t \to 0} f(t+c) = f(c)$.

38. Buktikan bahwa jika f kontinu di c dan $f(c) > 0$, maka terdapat suatu selang $(c - \delta, c + \delta)$ sedemikian sehingga $f(x) > 0$ pada selang ini.

39. Buktikan bahwa jika f kontinu pada $[0, 1]$ dan memenuhi $0 \leq f(x) \leq 1$

di sana, maka f mempunyai *titik tetap* – yakni, terdapat suatu bilangan c dalam $[0, 1]$ sedemikian sehingga $f(c) = c$. *Petunjuk:* Terapkan Teorema Nilai Antara terhadap $g(x) = x - f(x)$.

40. Cari nilai-nilai a dan b sehingga fungsi berikut kontinu di mana-mana.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{jika } x < 1 \\ ax + b & \text{jika } 1 \le x < 2 \\ 3x & \text{jika } x \ge 2 \end{cases}$$

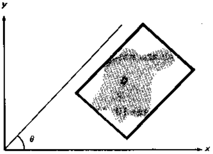
41. Seutas kawat elastis merentang pada interval $[0,1]$ dengan ujung-ujung yang bebas. Kawat tersebut berkontraksi (mengerut) sehingga mencapai interval $[a, b]$, $a \geqslant 0$, $b \leqslant 1$. Buktikan bahwa dari hasil ini ada suatu titik pada kawat (tepatnya hanya satu titik) yang tetap di tempat semula. Lihat Soal 39.

42. Apabila f kontinu pada $[0,1]$ dengan $f(0) = f(1) = 0$, buktikan bahwa grafik f berbentuk seutas tali (potongan garis dengan kedua ujungnya pada grafik) dengan panjang W, di mana W merupakan bilangan yang berada di antara 0 dan 1.

43. Gunakan Teorema Nilai Antara untuk menunjukkan bahwa selalu ada dua titik pada suatu cincin kawat melingkar yang bersuhu sama. *Petunjuk:* Ambil pusatnya pada titik asal dan umpamakan θ sebagai sudut yang dibentuk garis tengahnya dengan sumbu x, kemudian definisikan $f(\theta)$.

44. Mulai pukul empat pagi, seorang biarawan secara perlahan mendaki puncak suatu gunung dan tiba pada sore harinya. Pada hari berikutnya ia turun kembali dengan menelusuri jalan yang sama mulai pukul lima pagi dan tiba di bawah pada pukul sebelas pagi. Tunjukkan bahwa pada beberapa titik di sepanjang jalan, jam tangannya menunjukkan waktu yang sama pada kedua hari itu.

45. Buktikan bahwa setiap kawasan dapat dikelilingi oleh suatu empat persegi panjang. Dengan kata lain, andaikan D adalah suatu kawasan sembarang pada kuadran pertama dan ada sudut θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, D dapat dikelilingi oleh suatu persegi-panjang yang salah satu sisinya bersudut θ terhadap sumbu-x seperti tampak pada Gambar 8. Buktikan bahwa persegi-panjang itu berupa empat persegi panjang.



GAMBAR 8

46. Tunjukkan bahwa bila kita mengetahui nilai-nilai dari suatu fungsi kontinu merupakan bilangan rasional, kita dapat mengetahui nilai-nilainya di manapun juga. Dengan kata lain, buktikan bahwa bila f dan g merupakan fungsi-fungsi kontinu dan $f(x) = g(x)$ untuk setiap x di $\mathbb{Q}$ (rasional), maka $f(x) = g(x)$ untuk setiap x di

47. Diketahui $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap x dan y di R dan andaikan f kontinu pada $x = 0$.

(a) Buktikan bahwa f kontinu di mana saja.

(b) Buktikan bahwa ada suatu konstanta m yang sedemikian rupa sehingga $f(t) = mt$ untuk setiap t di $\mathbb{R}$ (lihat Soal 43 pada Bagian 2.1).

48. (Soal yang terkenal). Diketahui $f(x) = 0$ apabila x tak-rasional dan $f(x) = 1/q$ apabila x merupakan bilangan rasional p/q yang diperkecil ($q > 0$).

(a) Sketsa (sebaik mungkin) grafik f pada $(0,1)$.

(b) Tunjukkan bahwa f kontinu di setiap bilangan tak-rasional pada $(0,1)$ akan tetapi tak kontinu di setiap bilangan rasional pada $(0,1)$.

2.8 Soal-Soal Ulangan Bab

KUIS BENAR-SALAH

Jawablah dengan benar atau salah terhadap tiap pernyataan berikut. Bersiaplah untuk mempertahankan jawab anda.

1. Persamaan $xy + x^2 = 3y$ menentukan suatu fungsi dengan rumus berbentuk $y = f(x)$.
2. Persamaan $xy^2 + x^2 = 3x$ menentukan suatu fungsi dengan rumus $y = f(x)$.
3. Daerah asal natural dari
$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{4 - x}}$$
adalah selang $[0, 4)$.
4. Daerah hasil dari $f(x) = x^2 - 6$ adalah selang $[-6, \infty)$.
5. Jumlah dua fungsi genap (dengan daerah asal sama) adalah fungsi genap.
6. Hasilkali dua fungsi ganjil (dengan daerah asal sama) adalah fungsi ganjil.
7. Fungsi $f(x) = (2x^3 + x)/(x^2 + 1)$ adalah ganjil.
8. Jika daerah hasil suatu fungsi hanya terdiri atas sebuah bilangan, maka daerah asalnya juga hanya terdiri dari sebuah bilangan.
9. Jika daerah asal suatu fungsi paling sedikit mengandung dua bilangan, maka daerah hasilnya juga mengandung paling sedikit dua bilangan.
10. Jika $g(x) = [\![x/2]\!]$, maka $g(-1,8) = -1$.
11. Jika $f(x) = x^2$ dan $g(x) = x^3$, maka $f \circ g = g \circ f$.
12. Jika f dan g mempunyai daerah asal sama, maka f/g juga mempunyai daerah asal tersebut.
13. Jika grafik $y = f(x)$ memotong sumbu-x di $x = a$, maka grafik $y = f(x + h)$ memotong sumbu-x di $x = a - h$.
14. Kotangen adalah fungsi ganjil.
15. Daerah asal natural dari fungsi tangen adalah himpunan semua bilangan riil.
16. Jika $\cos s = \cos t$, maka $s = t$.
17. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = L$, maka $f(c) = L$.
18. Jika $f(c)$ tak terdefinisi, maka $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada.
19. Koordinat-koordinat dari lubang dalam grafik dari $y = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$ adalah $(5, 10)$.
20. Jika $p(x)$ adalah polinom, maka $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$.
21. Jika $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$, maka f kontinu di $x = c$.
22. Fungsi $f(x) = [\![x/2]\!]$ kontinu di $x = 2,3$.
23. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = f(2) > 0$, maka $f(x) < 1,001\, f(2)$ untuk semua x dalam suatu selang yang memuat 2.
24. Jika $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)]$ ada, maka $\lim_{x \to c} f(x)$ dan $\lim_{x \to c} g(x)$ keduanya ada.

25. Jika $0 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2 + 2x^4$ untuk semua x, maka $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

26. Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} f(x) = M$, maka $L = M$.

27. Jika $f(x) \neq g(x)$ untuk semua x, maka $\lim_{x \to c} f(x) \neq \lim_{x \to c} g(x)$

28. Jika $f(x) < 10$ untuk semua x dan $\lim_{x \to 2} f(x)$ ada, maka $\lim_{x \to 2} f(x) < 10$.

29. Jika $\lim_{x \to a} f(x) = b$, maka $\lim_{x \to a} |f(x)| = |b|$.

30. Jika f kontinu dan positif pada $[a, b]$, maka $1/f$ harus menerima semua nilai antara $1/f(a)$ dan $1/f(b)$.

SOAL-SOAL ANEKA RAGAM

1. Untuk $f(x) = 1/(x + 1) - 1/x$, cari tiap nilai (jika mungkin).

(a) $f(1)$ (b) $f(-\frac{1}{2})$
(c) $f(-1)$ (d) $f(t - 1)$
(e) $f\left(\frac{1}{t}\right)$

2. Untuk $g(x) = (x + 1)/x$, cari dan sederhanakan.

(a) $g(2)$ (b) $g(\frac{1}{2})$
(c) $g(\frac{1}{10})$ (d) $\dfrac{g(2 + h) - g(2)}{h}$

3. Uraikan daerah asal natural dari tiap fungsi.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ (b) $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{|2x + 3|}$

4. Di antara fungsi-fungsi yang berikut mana yang ganjil? Yang genap? Tidak ganjil maupun genap?

(a) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

(b) $g(x) = |\sin x| + \cos x$

(c) $h(x) = x^3 + \sin x$

(d) $k(x) = \dfrac{x^2 + 1}{|x| + x^4}$

5. Sketsakan grafik tiap fungsi berikut.

(a) $f(x) = x^2 - 1$ (b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

(c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika } 0 \leq x \leq 2 \\ 6 - x & \text{jika } x > 2 \end{cases}$

6. Andaikan bahwa f fungsi genap yang memenuhi $f(x) = -1 + \sqrt{x}$ untuk $x \geqslant 0$. Sketsakan grafik f untuk $-4 \leqslant x \leqslant 4$.

7. Sebuah kotak terbuka dibuat dengan memotong keempat pojok selembar papan ukuran 24 cm kali 32 cm berupa bujur sangkar dengan sisi x cm, dan kemudian melipat sisi-sisi itu ke atas. Nyatakan volume $V(x)$ dalam bentuk x. Apakah daerah asal untuk fungsi ini?

8. Andaikan $f(x) = x - 1/x$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Cari tiap nilai

(a) $(f + g)(2)$ (b) $(f \cdot g)(2)$
(c) $(f \circ g)(2)$ (d) $(g \circ f)(2)$
(e) $f^3(-1)$ (f) $f^2(2) + g^2(2)$

9. Sketsakan grafik masing-masing yang berikut, dengan memanfaatkan pengeseran.

(a) $y = \frac{1}{4}x^2$ (b) $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$
(c) $y = -1 + \frac{1}{4}(x + 2)^2$

10. Andaikan $f(x) = \sqrt{16 - x}$ dan $g(x) = x^4$. Apakah daerah asal masing-masing yang berikut?

(a) f (b) $f \circ g$
(c) $g \circ f$

11. Tuliskan $F(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ sebagai komposit dari empat fungsi, $f \circ g \circ h \circ k$.

12. Hitung yang berikut tanpa memakai kalkulator atau tabel.

(a) $\sin(570°)$ (b) $\cos\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

(c) $\sin^2(5) + \cos^2(5)$ (d) $\cos\left(\frac{-13\pi}{6}\right)$

13. Jika $\sin t = 0{,}8$ dan $\cos t < 0$, cari tiap nilai.

(a) $\sin(-t)$ (b) $\cos t$

(c) $\sin 2t$ (d) $\tan t$

(e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ (f) $\sin(\pi + t)$

14. Tuliskan $\sin 3t$ dalam bentuk $\sin t$. *Petunjuk:* $3t = 2t + t$.

15. Seekor lalat hinggap pada ruji sebuah roda yang berputar pada laju 20 putaran tiap menit. Jika jari-jari roda adalah 9 inci, berapa jauh yang ditempuh lalat dalam 1 detik?

Dalam Soal-soal 16-27, carilah limit yang ditunjukkan atau nyatakan jika tidak ada.

16. $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u + 1}$

17. $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u^2 - 1}{u - 1}$

18. $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{u + 1}{u^2 - 1}$

19. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 2/x}{x^2 - 4}$

20. $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{z^2 - 4}{z^2 + z - 6}$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{\sin 2x}$

22. $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{y^3 - 1}{y^2 - 1}$

23. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{x}$

25. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

26. $\lim\limits_{x \to 1/2^+} [\![4x]\!]$

27. $\lim\limits_{t \to 2} ([\![t]\!] - t)$

28. Andaikan

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{jika } x < -1 \\ x & \text{jika } -1 < x < 1 \\ 1 - x & \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

Cari tiap nilai. (a) $f(1)$ 0 (b) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ 0

(c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ 1 (d) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ -1

29. Kembali ke f dari Soal 28. (a) Berapa nilai-nilai x tempat f takkontinu? (b) Bagaimana f seharusnya didefinisikan di $x = -1$ agar kontinu di sana?

30. Berikan definisi ε, δ dalam tiap kasus.

(a) $\lim\limits_{u \to a} g(u) = M$ (b) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$

31. Jika $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 3$ dan $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -2$ dan jika g kontinu di $x = 3$, cari tiap nilai.

(a) $\lim\limits_{x \to 3} [2f(x) - 4g(x)]$ (b) $\lim\limits_{x \to 3} g(x) \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

(c) $g(3)$ (d) $\lim\limits_{x \to 3} g(f(x))$

(e) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{f^2(x) - 8g(x)}$ (f) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|g(x) - g(3)|}{f(x)}$

32. Sketsakan grafik suatu fungsi f yang memenuhi semua persyaratan berikut.

(a) Daerah asal adalah $[0, 6]$.
(b) $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 2$.
(c) f kontinu kecuali di $x = 2$.
(d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$ dan $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 3$.

33. Andaikan

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{jika } x \leq 0 \\ ax + b & \text{jika } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{jika } x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan a dan b sehingga f kontinu di mana-mana.

34. Gunakan Teorema Nilai Antara untuk membuktikan bahwa persamaan $x^5 - 4x^3 - 3x + 1 = 0$ paling sedikit mempunyai satu akar antara $x = 2$ dan $x = 3$.