BAB I. PENDAHULUAN

1.1 Sitem Bilangan

SKEMA BILANGAN

Bilangan Tidak Riil

Contoh :

$\sqrt{-4}$

(Bilangan Imajiner)

Bilangan Riil

Bilangan Irrasional

Tidak dapat dibentuk

Sebagai $\frac{a}{b}, b \neq 0$

Dimana a,b ε Bulat

Contoh : $\sqrt{2}, \sqrt{3}$

$\sqrt{2} = 1,41421356$

Bilangan Rasional

Dapat dibentuk

Sebagai $\frac{a}{b}, b \neq 0$

Dimana a,b ε Bulat

Contoh :

4 dan 0,3333......

Bilangan Bulat

Bilangan Cacah

Bilangan Asli

Tunjukkan bilangan berikut

Adalah bilangan rasional :

(1) 0,171717....

(2) 0,123123123....

(3) 0,3444444...

(4) 1,2565656.....

(5) 0,66666....

1.2 SIFAT – SIFAT MEDAN

(1) Sifat komutatif, yaitu $a + b = b + a$ dan $a\,b = b\,a$.

(2) Sifat assosiatif, yaitu $a+(b+c) = (a+b)+c$ dan $a\,(bc) = (ab)\,c$.

(3) Sifat distributif, yaitu $a\,(b+c) = ab+ac$ dan $(b - c)\,a = ba - ca$.

(4) Unsur Identitas, yaitu 0 dan 1 karena $x + 0 = x$ dan $1 \,.\, x = x$.

(5) Unsur Invers, yaitu x inversnya $-x$, karena $x + (-x) = 0$ untuk penjumlahan dan x inversnya $1/x$, karena $x \,.\, 1/x = 1$ untuk perkalian.

1.3 SIFAT – SIFAT URUTAN

(1) Trikotomi, yaitu jika a dan b adalah bilangan-bilangan riil maka pasti satu diantara yang berikut berlaku :

$a < b$ atau $a = b$ atau $a > b$

(2) Ketransitifan, yaitu jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$

(3) Penambahan, yaitu jika $a < b$ maka $a + x < b + x$

(4) Perkalian, yaitu jika $a < b$ dan $x > 0$ maka $ax < bx$

jika $a < b$ dan $x < 0$ maka $ax > bx$

Contoh : Selesaikan ketaksamaan berikut : (1) $2x - 7 < 4x - 2$

(2) $-5 \le 2x + 6 < 4$ (3) $x^2 - x < 6$ (4) $\dfrac{x-1}{x+2} \ge 0$ (5) $\dfrac{2x-5}{x-2} \le 1$

Contoh soal :

(1) $4 - 3(8 - 12) - 6 = ...$ (2) $-4\,[\,3(-6 + 13) - 2(5 - 9)] = ...$

(3) $\dfrac{5}{6} - \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{2}{3}\right) = ...$ (4) $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}\right) + \dfrac{1}{6}\right] = ...$

(5) $\dfrac{14}{33}\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{7}\right)^2 = ...$ (6) $\dfrac{\dfrac{11}{49} - \dfrac{3}{7}}{\dfrac{11}{49} + \dfrac{3}{7}} = ...$

Contoh soal :

1. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=....$

2. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{2}=....$

3. $3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)=....$

4. $2\sqrt[3]{4}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{16}\right)=....$

5. $\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)^{-2}=....$

6. $(2x-3)\,(2x+3)=....$

7. $(2x-3)^2=....$

8. $(3x-9)\,(2x+1)=....$

9. $(3x+11)\,(2x-4)=....$

10. $(3t^2-t+1)^2=....$

11. $(2t-1)^3=....$

12. $\frac{x^2-4}{x-2}=....$

13. $\frac{x^2-x-6}{x-3}=....$

14. $\frac{x^3-8}{x-2}=....$

15. $\frac{2x-2x^2}{x^3-2x^2+x}=....$

16. $4x-7<3x+5$

17. $7x-1\le 10x+4$

18. $10x+1>8x+5$

19. $-6<2x+3<-1$

20. $-2<1-5x\le 3$

21. $2+3x<5x+1<16$

22. $x^2+x-12<0$

23. $3x^2-11x-4\le 0$

24. $2x^2+5x-3>0$

25. $\frac{x+5}{2x-1}\le 0$

26. $\frac{1}{x}<5$

27. $\frac{1}{3x-2}\le 4$

28. $\frac{x-2}{x+4}<2$

29. $(x+2)(2x-1)(3x+7)\ge 0$

30. $x^3-5x^2-6x<0$

1.4 NILAI MUTLAK

Nilai mutlak suatu bilangan riil x, dinyatakan oleh $|x|$

didefinisikan sebagai : $|x| = x$, jika $x \geq 0$

$|x| = -x$, jika $x < 0$

Contoh :

$|5| = 5$ $|-4| = -(-4) = 4$ dan $|0| = 0$

Salah satu cara terbaik untuk memahami nilai mutlak adalah sebagai jarak yang tidak berarah. Khususnya $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal (0 pada garis bilangan) atau $|x - a|$ adalah jarak antara x dengan a sehingga $|x - a| = |a - x|$.

Sifat- sifat nilai mutlak :

(1) Perkalian adalah $|a\,b| = |a|\;|b|$

(2) Pembagian adalah $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

(3) Penjumlahan adalah $|a + b| \leq |a| + |b|$

(4) Pengurangan adalah $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|$

(5) $|x| < a$ jika dan hanya jika $-a < x < a$

(6) $|x| > a$ jika dan hanya jika $x < -a$ atau $x > a$

Contoh : Selesaikan ketaksamaan (1) $|x - 4| < 7$

(2) $|3x - 5| \geq 1$

Contoh soal :

(1) $|x + 1| < 4$ (2) $|3x + 4| < 8$ (3) $|2x - 7| > 3$

(4) $|4x + 2| \geq 10$ (5) $\left|\frac{x}{3} - 2\right| \leq 6$ (6) $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$

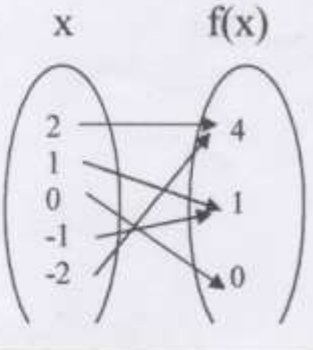
FUNGSI

Bayangkanlah suatu fungsi sebagai sebuah senapan. Fungsi ini mengambil amunisi dari suatu himpunan yang dinamakan *daerah asal* (daerah definisi, domain) dan menembakkannya pada suatu himpunan sasaran. Setiap peluru mengenai sebuah titik sasaran *tunggal*, tetapi dapat terjadi bahwa beberapa peluru mendarat pada titik sasaran yang sama. Kita dapat menyatakan definisi secara lebih formal dan memperkenalkan beberapa cara penulisannya.

Definisi : Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap objek x dalam satu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik f(x) dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (jelajah, range) fungsi tersebut.

Definisi ini tidak memberikan pembatasan pada himpunan-himpunan daerah asal dan daerah hasil. Daerah asal mungkin terdiri dari himpunan mahasiswa dalam kelas kakulus anda, daerah nilai berupa himpunan angka atau huruf (A, B, C, D, E) yang akan diberikan, dan aturan padanan adalah prosedur yang dipakai dosen anda dalam memberikan nilai.

Jika digambarkan suatu fungsi $f(x) = x^2$ dengan daerah asal A = {2, 1, 0, - 1, - 2}, adalah sebagai berikut :



Dalam kalkulus yang akan lebih bertalian adalah contoh-contoh dengan daerah asal dan daerah hasil dimana keduanya berupa himpunan bilangan riil. Misalnya fungsi f mungkin mengambil sebuah bilangan riil x dan mengkuadratkannya, sehingga menghasilkan bilangan riil x^2. Dalam hal ini, kita mempunyai sebuah rumus yang memberikan aturan padanan, yaitu $f(x) = x^2$ (Seperti yang diperlihatkan pada gambar di atas).

Fungsi terdiri dari : (1) fungsi polinom, (2) fungsi trigonometri dan (3) fungsi eksponen dan logaritma (transeden), dapat dijelaskan masing-masing sebagai berikut :

Fungsi Polinom

Bentuk umum fungsi polinom adalah $ax^n + bx^{n-1} + \ldots. + zx^0$

Notasi fungsi : Untuk memberi nama fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f (atau g atau F). Maka f(x), yang dibaca "f dari x" atau "f pada x", menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x.

Jadi jika $f(x) = x^3 - 4$, maka :

$f(2) = 2^3 - 4 = 8 - 4 = 4$

$f(-1) = (-1)^3 - 4 = -1 - 4 = -5$

$f(a) = a^3 - 4$

$f(a+h) = (a+h)^3 - 4 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 4$

Pemahaman yang jelas tentang cara menuliskan fungsi adalah hal yang sangat penting dalam kalkulus. Pelajarilah contoh-contoh berikut secara seksama. Contoh-contoh tersebut akan memainkan peranan penting dalam bab berikutnya.

Contoh 1. Untuk $f(x) = x^2 - 2x$ maka :

(a) $f(4) = 4^2 - 2(4) = 16 - 8 = 8$

(b) $f(4+h) = (4+h)^2 - 2(4+h) = 16 + 8h + h^2 - 8 - 2h = 8 + 6h + h^2$

(d) $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$

(e) $f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h$

(f) $$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h) - (x^2 - 2x) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h - x^2 + 2x \\ &= 2xh + h^2 - 2h \end{aligned}$$

(g) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{2xh+h^2-2h}{h}=\dfrac{h(2x+h-2)}{h}=2x+h-2$

Contoh 2. Untuk $g(x) = \dfrac{1}{x}$, *cari dan sederhanakan* $\dfrac{g(a+h)-g(a)}{h}$

$$\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-(a+h)}{(a+h)a}}{h}=\frac{-h}{(a+h)a}.\frac{1}{h}=\frac{-1}{(a+h)a}=\frac{-1}{a^2+ah}$$

Operasi pada fungsi polinom

Fungsi bukanlah bilangan. Tetapi seperti halnya dua bilangan a dan b dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah bilangan baru a + b, demikian juga dua fungsi f dan g dapat ditambahkan untuk menghasilkan sebuah fungsi baru f + g. Ini baru salah satu dari beberapa operasi pada fungsi. Yang lainnya adalah f – g, f . g, f / g, dan sebagainya.

Pandanglah fungsi-fungsi f dan g dengan rumus-rumus :

$f(x)=\dfrac{x-3}{2}$ *dan* $g(x)=\sqrt{x}$ *maka*

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\dfrac{x-3}{2}+\sqrt{x}$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{x-3}{2}-\sqrt{x}$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\dfrac{x-3}{2}.\sqrt{x}$

$\left(f \right) \quad f(x) \quad x-3$

$$f^2(x) = [f(x)]^2 = \left[\frac{x-3}{2}\right]^2 = \frac{x^2-6x+9}{4}$$

$$g^3(x) = [g(x)]^3 = (\sqrt{x})^3 = x^{3/2}$$

Komposisi Fungsi

Sebelumnya anda diminta untuk membayangkan sebuah fungsi sebagai sebuah senapan. Sekarang anda diminta memikirkan fungsi f sebagai sebuah mesin. Fungsi ini menerima x sebagai masukan, bekerja pada x, dan menghasilkan f(x) sebagai keluaran. Dua mesin sering kali dapat diletakkan berdampingan untuk membuat sebuah mesin yang lebih rumit, demikian juga halnya dengan dua fungsi f dan g. Jika f bekerja pada x untuk menghasilkan f(x) dan kemudian g bekerja pada f(x) untuk menghasilkan g(f(x)), dikatakan bahwa kita telah menyusun g dengan f. Fungsi yang dihasilkan, disebut komposit g dengan f, dinyatakan oleh gof. Jadi gof(x) = g(f(x)).

Pandanglah fungsi-fungsi f dan g dengan rumus-rumus :

$$f(x) = \frac{x-3}{2} \; dan \; g(x) = \sqrt{x} \; maka$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$$

Soal Latihan

Diketahui fungsi-fungsi $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 4x$, dan $h(x) = 10$, tentukan :

1. $f(4)$, $f(b)$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\,.\,g)(x)$, $(f/g)(x)$, $f^2(x)$, $g^3(x)$
3. $fog(x)$, $gof(x)$, $fogoh(x)$, $hogof(x)$, $goh(x)$, $hog(x)$, $foh(x)$, $hof(x)$

Fungsi Trigonometri

Kita anggap mahasiswa telah belajar trigonometri dan akrab dengan definisi-definisi fungsi trigonometri berdasarkan sudut-sudut dan segitiga siku-siku. Kita ingatkan mahasiswa tiga definisi-definisi trigonometri ini dalam gambar di bawah ini

$$Sin\ \alpha = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ miring} \qquad Cos\ \alpha = \frac{sisi\ dekat\ sudut}{sisi\ miring}$$

$$Tan\ \alpha = \frac{sisi\ depan\ sudut}{sisi\ dekat\ sudut}$$

$$Tan\ x = \frac{Sin\ x}{Cos\ x}, Cot\ x = \frac{Cos\ x}{Sin\ x}, Sec\ x = \frac{1}{Cos\ x}, Csc\ x = \frac{1}{Sin\ x}$$

Kesamaan Pythagoras :

$Sin^2 x + Cos^2 x = 1$

$1 + Tan^2 x = Sec^2 x$

$1 + Cot^2 x = Csc^2 x$