# 3 Turunan



*Penemuan Leibniz letaknya dalam arah di mana semua perkembangan modern dalam ilmu terletak, dalam mem bangun ketrampilan, simetri, dan harmoni, yaitu, sifat mencakupi dan ketajaman – ketimbang menagani masalah-masalah tunggal, yang penyelesaiannya para pengikut segera mencapai ketrampilan yang lebih besar daripada dirinya sendiri.*

*J.T.Merz*

*Gottfried Wilhelm Leibniz*
*1646–1716*

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah seorang jenius universal, seorang pakar dalam hukum, agama, filsafat, kesusasteraan, politik, geologi, sejarah, dan matematika. Lahir di Leipzig, Jerman, ia mendaftar di Universitas Leipzig dan menggondol doktor dari Universitas Altdorf. Seperti Descartes, yang karyanya ia pelajari, Leibniz mencari suatu metode universal dengan mana ia dapat memperoleh pengetahuan dan memahami kesatuan sifat-sifat dasarnya. Salah satu keinginan besarnya adalah mendamaikan keyakinan Katolik dan Protestan.

Bersama dengan Isaac Newton, ia membagi penghargaan untuk penemuan kalkulus. Masalah prioritas menyebabkan pertentangan yang tidak henti-hentinya antara pengikut dua orang besar ini, satu Inggris, yang lainnya Jerman. Sejarah menjadi hakim bahwa Newtonlah yang pertama mempunyai pemikiran utama (1665–66), tetapi bahwa Leibniz menemukan mereka secara tersendiri, selama tahun 1673–76. Dengan kebesarannya itupun, Leibniz tidak menerima kehormatan seperti yang dianugrahkan pada Newton. Ia meninggal sebagai orang kesepian, pemakamannya hanya dihadiri seorang pelayat, yaitu sekretarisnya.

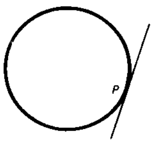
Mungkin Leibnizlah pencipta lambang-lambang matematis terbesar. Kepadanya kita berhutang nama-nama *kalkulus diferensial* dan *kalkulus integral*, sama halnya seperti lambang-lambang baku $dy/dx$ dan $\int$ untuk turunan dan integral. Istilah *fungsi* dan penggunaan secara konsisten dari $=$ untuk kesamaan merupakan sumbangan-sumbangan lainnya. Kalkulus berkembang jauh lebih cepat di daratan Eropa daripada di Inggris, sebagian besar disebabkan oleh keunggulan perlambangannya.

## 3.1 Dua Masalah Dengan Satu Tema

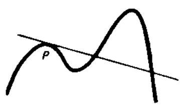
Masalah pertama kita sangat tua: ia sudah dimasalahkan sejak ilmuwan besar Yunani Archimedes (287-212 SM). Yang dimaksud adalah masalah *garis singgung.*

Masalah kita yang kedua lebih baru. Masalah ini muncul dari percobaan oleh Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) dan lainnya untuk melukiskan kecepatan sebuah benda bergerak. Ini adalah masalah *kecepatan sesaat.*

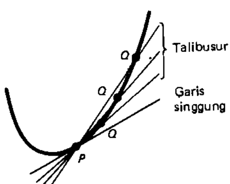
Dua masalah itu, satu geometri dan lainnya mekanis, kelihatannya tidak ada hubungannya. Dalam hal ini, kelihatannya memperdayakan. Kedua masalah itu merupakan kembaran yang identik.




GAMBAR 1




GAMBAR 2

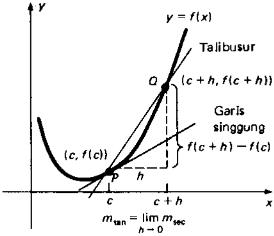



Garis singgung adalah posisi pembatas garis talibusur

GAMBAR 3

GARIS SINGGUNG Gagasan garis singgung dari Euclides sebagai suatu garis yang memotong suatu kurva pada satu titik, benar untuk lingkaran-lingkaran (Gambar 1) tetapi sama sekali tidak memuaskan untuk kebanyakan kurva-kurva lain (Gambar 2). Gagasan bahwa garis singgung pada suatu kurva di $P$ adalah garis yang paling menghampiri kurva dekat $P$ adalah lebih baik, tetapi masih tetap terlalu samar-samar untuk ketaksamaan matematis. Konsep limit menyediakan suatu cara mendapatkan uraian terbaik.

Andaikan $P$ adalah suatu titik tetap pada sebuah kurva dan andaikan $Q$ adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan pada kurva tersebut. Garis yang melalui $P$ dan $Q$, disebut **talibusur. Garis singgung** di $P$ adalah posisi pembatas (jika ada) dari talibusur itu bila $Q$ bergerak ke arah $P$ sepanjang kurva (Gambar 3).




GAMBAR 4

Andaikan kurva tersebut adalah grafik dari persamaan $y = f(x)$. Maka $P$ mempunyai koordinat $(c, f(c))$, titik $Q$ di dekatnya mempunyai koordinat $(c + h, f(c + h))$, dan talibusur yang melalui $P$ dan $Q$ mempunyai kemiringan* $m_{sec}$ yang diberikan oleh (Gambar 4)

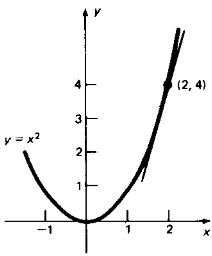
$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Akibatnya, garis singgung – Jika tidak tegaklurus – adalah garis yang melalui $P$ dengan kemiringan $m_{\tan}$ yang memenuhi

$$\boxed{m_{\tan} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}}$$

**CONTOH 1** Cari kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x) = x^2$ di titik $(2, 4)$.

***Penyelesaian*** Garis yang kemiringannya kita cari diperlihatkan pada Gambar 5. Jelas ia mempunyai suatu kemiringan positif yang besar.




GAMBAR 5

$$\begin{aligned} m_{\tan} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4 + h)}{\cancel{h}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

■

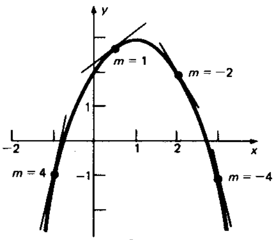
**CONTOH 2** Cari kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x) = -x^2 + 2x + 2$ pada titik-titik yang koordinat-$x$-nya $-1$, $\frac{1}{2}$, 2, dan 3.

***Penyelesaian*** Ketimbang membuat empat perhitungan terpisah, kelihatannya lebih bijaksana untuk menghitung kemiringan itu di titik yang koordinat $x$-nya di titik $c$ dan kemudian mendapatkan empat jawab yang diinginkan dengan cara (substitusi).

---

*) Di sini kemiringan menerjemahkan pengertian "slope"; para penulis lain ada yang menggunakan "tanjakan", "lereng.

$$
\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-(c+h)^2 + 2(c+h) + 2 - (-c^2+2c+2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-c^2 - 2ch - h^2 + 2c + 2h + 2 + c^2 - 2c - 2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-2c - h + 2)}{\cancel{h}} \\
&= -2c + 2
\end{aligned}
$$



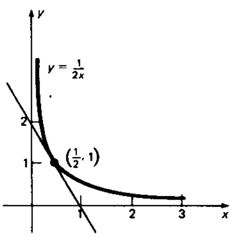

GAMBAR 6

Keempat kemiringan yang diinginkan (diperoleh dengan menetapkan $c = -1, \frac{1}{2}, 2, 3$) adalah 4, 1, −2, dan −4. Jawaban ini memang bersesuaian dengan grafik pada Gambar 6. ■

**CONTOH 3** Cari persamaan garis singgung pada kurva $y = 1/(2x)$ di titik $(\frac{1}{2}, 1)$ (lihat Gambar 7).

***Penyelesaian***

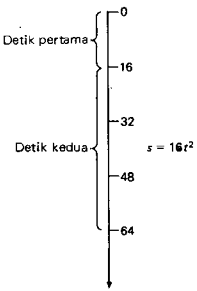
$$
\begin{aligned}
m_{\tan} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\frac{1}{2}+h)-f(\frac{1}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{2(\frac{1}{2}+h)} - \dfrac{1}{2(\frac{1}{2})}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+2h} - \dfrac{1}{1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1-(1+2h)}{h(1+2h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h(1+2h)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{1+2h} = -2
\end{aligned}
$$




GAMBAR 7

Dengan mengetahui kemiringan garis ($m = -2$) dan titik $(\frac{1}{2}, 1)$ pada garis itu, secara mudah kita dapat menuliskan persamaannya dengan memakai bentuk kemiringan titik $y - y_0 = m(x - x_0)$. Hasilnya adalah $y - 1 = -2(x - \frac{1}{2})$. ■

**KECEPATAN SESAAT** Jika kita mengendarai sebuah mobil dari satu kota ke kota lain yang berjarak 80 km dalam waktu 2 jam, maka kecepatan rata-rata kita adalah 40 km tiap jam. Artinya, *kecepatan rata-rata* adalah jarak antara posisi pertama ke posisi kedua dibagi dengan waktu tempuh.




GAMBAR 8

Tetapi selama perjalanan penunjuk laju (speedometer) sering tidak menunjukkan angka 40 km. Waktu baru berangkat, 0 km; kadangkala kecepatan naik sampai 57 km; akhirnya jatuh ke angka 0 lagi. Jadi apa yang diukur oleh pengukur laju? Tentu saja bukan kecepatan rata-rata.

Ambil contoh yang lebih persis, yaitu sebuah benda $P$ yang jatuh dalam ruang hampa udara. Percobaan menunjukkan bahwa apabila mulai jatuh dari keadaan diam, $P$ jatuh sejauh $16t^2$ meter dalam $t$ detik. Jadi benda ini jatuh sejauh 16 meter dalam detik pertama dan 64 meter dalam dua detik yang kedua (Gambar 8); jelaslah bahwa $P$ jatuh makin cepat dengan berlalunya waktu.

Selama detik kedua (yakni, dalam selang waktu mulai $t = 1$ sampai $t = 2$), $P$ jatuh sejauh $(64 - 16)$ meter. Kecepatan rata-ratanya adalah

$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{64 - 16}{2 - 1} = 48 \quad \text{meter/detik}$$

Selama selang waktu dari $t = 1$ sampai $t = 1{,}5$, $P$ jatuh sejauh $16(1{,}5)^2 - 16 = 20$ meter. Kecepatan rata-ratanya adalah

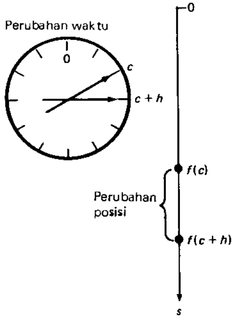
$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{16(1{,}5)^2 - 16}{1{,}5 - 1} = \frac{20}{0{,}5} = 40 \quad \text{meter/detik}$$

Demikian pula, pada selang waktu $t = 1$ sampai $t = 1{,}1$ dan $t = 1$ sampai $t = 1{,}01$, kita hitung masing-masing kecepatan rata-ratanya adalah

$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{16(1{,}1)^2 - 16}{1{,}1 - 1} = \frac{3{,}36}{0{,}1} = 33{,}6 \quad \text{meter/detik}$$

$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{16(1{,}01)^2 - 16}{1{,}01 - 1} = \frac{0{,}3216}{0{,}01} = 32{,}16 \quad \text{meter/detik}$$

Apa yang telah kita lakukan adalah menghitung kecepatan rata-rata selama selang waktu yang semakin singkat, masing-masing mulai pada $t = 1$. Semakin pendek selang waktu, semakin baik kita menghampiri kecepatan yang 'benar' pada saat $t = 1$.




GAMBAR 9

Dengan memperhatikan bilangan-bilangan 48; 40; 33,6; dan 32,16; anda mungkin menerka kecepatan sesaatnya adalah 32.

Tetapi marilah kita lebih tepat. Andaikan bahwa sebuah benda $P$ bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya pada saat $t$ diberikan oleh $s = f(t)$. Pada saat $c$ benda berada di $f(c)$; pada saat yang berdekatan $c + h$, ia berada di $f(c + h)$ (lihat Gambar 9). Jadi kecepatan rata-rata pada selang ini adalah

$$v_{\text{rata-rata}} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Dan sekarang kita **definisikan kecepatan sesaat** $v$ di $c$ oleh

$$v = \lim_{h \to 0} v_{\text{rata-rata}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Dalam hal di mana $f(t) = 16t^2$, kecepatan sesaat pada $t = 1$ adalah

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16(1+h)^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16 + 32h + 16h^2 - 16}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (32 + 16h) = 32 \end{aligned}$$

Ini membenarkan perkiraan kita sebelumnya.

Sekarang anda dapat melihat mengapa kita menyebut *kemiringan dari garis singgung* dan *kecepatan sesaat* adalah kembaran identik. Lihatlah dua rumus dalam kotak pada pasal ini. Mereka memberikan nama berlainan untuk konsep yang sama.

**CONTOH 4** Hitunglah kecepatan sesaat dari sebuah benda jatuh, beranjak dari posisi diam pada $t = 3{,}8$ detik dan pada $t = 5{,}4$ detik.

***Penyelesaian*** Kita hitung kecepatan pada $t = c$ detik.

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16(c+h)^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{16c^2 + 32ch + 16h^2 - 16c^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (32c + 16h) = 32c \end{aligned}$$

Dengan demikian, kecepatan pada 3,8 detik adalah 32(3,8) = 121,6 meter/detik; pada 5,4 detik, adalah 32(5,4) = 172,8 meter/detik. ■

**CONTOH 5** Berapa lama waktu yang diperlukan oleh benda jatuh pada Contoh 4 untuk mencapai kecepatan sebesar 112 meter/detik?

*Penyelesaian* Kita pelajari dalam Contoh 4 bahwa kecepatan setelah $c$ detik adalah $32c$. Jadi kita harus menyelesaikan persamaan $32c = 112$. Penyelesaiannya adalah $c = \frac{112}{32} =$ 3,5 detik. ■

**CONTOH 6** Sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat dan $s$, jarak berarah dalam sentimeter yang diukur dari titik asal ke titik yang dicapai setelah $t$ detik, diberikan oleh $s = \sqrt{5t+1}$. Hitunglah kecepatan partikel pada akhir 3 detik.

*Penyelesaian*

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(3+h)+1} - \sqrt{5(3)+1}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h} \end{aligned}$$

Untuk menghitung limit ini, kita rasionalkan penyebut (dengan mengalikan pembilang dan penyebut dengan $\sqrt{16+5h} + 4$). Kita peroleh

$$\begin{aligned} v &= \lim_{h\to 0} \left( \frac{\sqrt{16+5h} - 4}{h} \cdot \frac{\sqrt{16+5h} + 4}{\sqrt{16+5h} + 4} \right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{16 + 5h - 16}{h(\sqrt{16+5h} + 4)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{16+5h} + 4} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Kita simpulkan bahwa kecepatan pada akhir 3 detik pertama adalah $\frac{5}{8}$ cm/detik. ■

**KECEPATAN DAN LAJU**

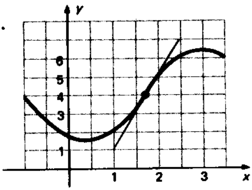
Untuk [illegible]

**LAJU PERUBAHAN** Kecepatan adalah satu-satunya dari sekian banyak laju perubahan yang amat penting dalam pelajaran ini; kecepatan merupakan laju perubahan jarak terhadap waktu. Laju perubahan lainnya yang penting bagi kita adalah kepadatan dari suatu kawat (laju perubahan massa terhadap jarak), pendapatan marjinal (laju perubahan pendapatan terhadap beberapa jenis produk) dan arus listrik (laju perubahan muatan listrik terhadap waktu). Contoh-contoh lainnya akan kita temui pada kelompok soal dan di setiap soal akan kita bahas laju perubahan *rata-rata* dan laju perubahan *sesaat.* Istilah *laju perubahan* tanpa ada keterangan apa-apa akan diartikan sebagai laju perubahan sesaat.

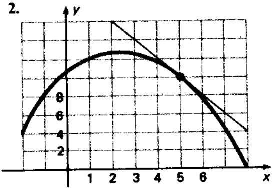
## SOAL-SOAL 3.1

Dalam Soal-soal 1-2, digambar suatu garis singgung pada kurva. Taksir kemiringannya (kemiringan = naik/jarak). Perhatikan perbedaan **skala pada kedua sumbunya.**

1.

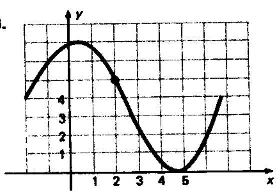



2.

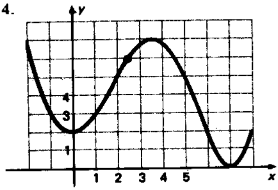



Dalam Soal-soal 3-6, gambar garis singgung pada kurva melalui titik yang ditunjuk dan taksir kemiringannya.

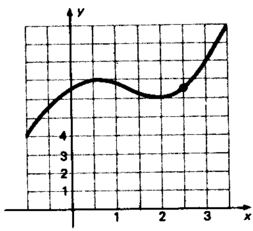
3.



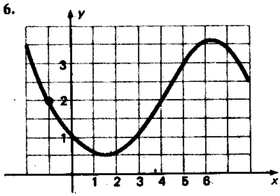

4.




5.




6.




7. Pandang $y = 4 - x^2$.

(a) Sketsakan grafiknya seteliti mungkin.

(b) Gambar garis singgung di titik $(3, -5)$.

(c) Taksir kemiringan garis singgung ini.

[C] (d) Hitung kemiringan talibusur yang melalui titik $(3, -5)$ dan $(3,01;\ 4 - 3{,}01^2)$.

(e) Cari kemiringan sebenarnya dari garis singgung di titik $(3, -5)$ dengan memakai proses limit (lihat Contoh 1).

8. Pandang $y = x^3 + 1$.

(a) Sketsakan grafiknya.

(b) Gambar garis singgung di titik $(2, 9)$.

(c) Taksir kemiringan garis singgung ini.

[C] (d) Hitung kemiringan talibusur yang melalui titik $(2, 9)$ dan $(1{,}999;\ 1{,}999^3 + 1)$.

(e) Gunakan proses limit untuk mencari kemiringan yang sebenarnya dari garis singgung di titik $(2, 9)$.

9. Cari kemiringan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 3x + 2$ di titik-titik dengan $x = -2;\ 1{,}5;\ 2{,}5$ (lihat Contoh 2).

10. Cari kemiringan garis singgung kurva $y = x^3 - 2x$ di titik-titik dengan $x = -3;\ 1{,}5;\ 0{,}3$.

11. Sketsakan grafik $y = 1/(x + 1)$ dan kemudian cari persamaan garis singgung di titik $(1, \frac{1}{2})$ (lihat Contoh 3).

12. Cari persamaan garis singgung pada $y = 2/(x - 2)$ di titik $(0, -1)$.

13. Anggap sebuah benda jatuh akan jatuh $16t^2$ meter dalam $t$ detik.

(a) Seberapa jauh ia akan jatuh antara $t = 3$ dan $t = 4$?

(b) Berapa kecepatan rata-rata pada selang $3 \leqslant t \leqslant 4$?

[C] (c) Berapa kecepatan rata-rata pada selang $3 \leqslant t \leqslant 3{,}02$?

(d) Cari kecepatan sesaat pada $t = 3$ (lihat Contoh 4).

14. Sebuah benda menjelajahi garis sehingga posisi $s$ nya adalah $s = 2t^2 + 2$ meter setelah $t$ detik.

(a) Berapa kecepatan rata-rata pada selang $2 \leqslant t \leqslant 3$?

[C] (b) Berapa kecepatan rata-rata pada selang $2 \leqslant t \leqslant 2{,}001$?

(c) Berapa kecepatan rata-rata pada selang $2 \leqslant t \leqslant 2 + h$?

(d) Cari kecepatan pada $t = 2$.

15. Andaikan sebuah benda bergerak sepanjang sebuah garis $\sqrt{t}$ meter dalam $t$ detik.

(a) Cari kecepatan sesaat pada $t = c$, $c > 0$.

(b) Bilamana benda ini mencapai kecepatan $\frac{1}{6}$ meter/detik? (lihat Contoh 5).

16. Jika sebuah partikel bergerak sepanjang garis koordinat sehingga jarak berarah dari titik asal ke titik setelah $t$ detik adalah $(-t^2 + 4t)$ meter, kapan partikel akan berhenti (yaitu, bilamana kecepatannya menjadi nol)?

17. Suatu kultur bakteri tertentu berkembang sehingga mempunyai massa sebesar $\frac{1}{2}t^2 + 1$ gram setelah $t$ jam.

[C] (a) Seberapa banyak kultur ini berkembang selama selang $2 \leqslant t \leqslant 2{,}01$?

(b) Berapa laju perkembangan rata-rata selama selang $2 \leqslant t \leqslant 2{,}01$?

(c) Berapa laju perkembangan pada $t = 2$?

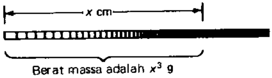
18. Sebuah bisnis berhasil baik sedemikian sehingga keuntungan total (terakumulasi) setelah $t$ tahun adalah $1000t^2$ rupiah.

(a) Berapa besar keuntungan selama tahun ketiga (yaitu, antara $t = 2$ dan $t = 3$)?

(b) Berapa laju rata-rata keuntungan (*rata-rata keuntungan marjinal*) selama tengah tahun pertama dari tahun ketiga (yaitu, antara $t = 2$ dan $t = 2{,}5$)?

(c) Berapa laju keuntungan sesaat (*keuntungan marjinal*) pada $t = 2$?

19. Kawat sepanjang 8 sentimeter mempunyai massa antara ujung kiri dengan sebuah titik sejauh $x$ sentimeter ke kanan seberat $x^3$ gram.




GAMBAR 10

(a) Berapa kepadatan rata-rata dari pertengahan ruas 2-sentimeter kawat ini? *Catatan:* Kepadatan rata-rata sama dengan massa/panjang.

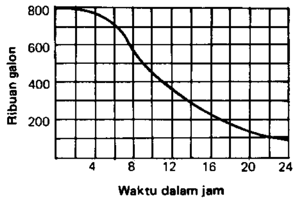
(b) Berapa kepadatan sebenarnya di titik berjarak 3 cm dari ujung kiri?

20. Andaikan pendapatan dalam rupiah dari produksi $x$ kilogram suatu barang diberikan oleh $R(x) = 0{,}5x - 0{,}002x^2$. Cari laju perubahan sesaat dari pendapatan bilamana $x = 10$; bilamana $x = 100$. (Laju perubahan pendapatan sesaat disebut *pendapatan marjinal*).

21. Berat dalam gram dari suatu tumor yang membahayakan pada saat $t$ adalah $W(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}09t$, dengan $t$ diukur dalam minggu. Cari laju pertumbuhan tumor bilamana $t = 10$.

22. Sebuah kota dijangkiti oleh epidemi influenza. Petugas menaksir bahwa $t$ hari setelah mulainya epidemi, banyaknya orang yang sakit flu diberikan oleh $p(t) = 120t^2 - 2t^3$, asalkan bahwa $0 \leqslant t \leqslant 40$. Dengan laju berapa flu menular pada saat $t = 10$; $t = 20$; $t = 40$?

**23. Grafik pada Gambar 11 menunjukkan jumlah air yang tersedia di dalam tangki air di suatu kota selama 24 jam, di mana tidak ada air yang dipompakan lagi**




**GAMBAR 11**

**ke dalam tangki. Berapakah laju perubahan air rata-rata selama 1 hari? Seberapa cepatkah air dipergunakan pada pukul 8?**

**24. Laju perubahan muatan listrik terhadap waktu dinamakan *arus listrik*. Apabila $\frac{1}{3}t^3 + t$ coulomb muatan mengalir melalui suatu kawat penghantar dalam $t$ detik, tentukan besarnya arus listrik dalam ampere (coulomb per detik) setelah 3 detik. Kapankah suatu sekering 20 ampere yang dipasang pada saluran itu akan putus?**

**25. Jari-jari suatu tumpahan minyak yang berbentuk lingkaran berkembang pada laju yang tetap 2 kilometer per hari. Pada laju berapakah daerah tumpahan itu berkembang 3 hari setelah tumpahan itu terjadi?**

**26. Tentukan laju perubahan luas suatu lingkaran terhadap kelilingnya pada saat panjang garis kelilingnya 6 cm.**

## 3.2 Turunan

Kita telah melihat bahwa *kemiringan garis singgung* dan *kecepatan sesaat* adalah manifestasi dari pemikiran dasar yang sama. Laju pertumbuhan organisme (biologi), keuntungan marjinal (ekonomi), kepadatan kawat (fisika), dan laju pemisahan (kimia) adalah versi-versi lain dari konsep yang sama. Pengertian matematis yang baik menyarankan agar kita menelaah konsep ini terlepas dari kosa kata yang khusus dan terapan yang beraneka ragam ini. Kita memilih nama netral *turunan* (derivatif). Ini merupakan kata kunci dalam kalkulus selain kata *fungsi* dan *limit*.

**Definisi**

**Turunan fungsi $f$ adalah fungsi lain $f'$ (dibaca "$f$ aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan $c$ adalah**

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

**asalkan limit ini ada.**

Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa $f$ **terdiferensialkan** (terturunkan) di $c$. Pencarian turunan disebut **pendiferensialan**; bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut **kalkulus diferensial.**

## CONTOH-CONTOH YANG MEMBANTU MENJELASKAN

**CONTOH 1** Andaikan $f(x) = 13x - 6$. Cari $f'(4)$.

***Penyelesaian***

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

■

**CONTOH 2** Jika $f(x) = x^3 + 7x$, cari $f'(c)$.

***Penyelesaian***

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(c+h)^3 + 7(c+h)] - [c^3 + 7c]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3c^2h + 3ch^2 + h^3 + 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3c^2 + 3ch + h^2 + 7)$$

$$= 3c^2 + 7$$

■

**CONTOH 3** Jika $f(x) = 1/x$, cari $f'(x)$.

***Penyelesaian*** Perhatikan perubahan halus dalam cara contoh ini dinyatakan. Sedemikian jauh kita telah memakai huruf $c$ untuk menyatakan suatu bilangan tetap pada mana turunan harus dihitung. Sesuai dengan itu, kita telah menghitung $f'(c)$. Untuk menghitung $f'(x)$, cukup kita bayangkan $x$ sebagai sebuah bilangan tetap, tetapi sebarang dan meneruskan seperti sebelumnya.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[ \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} \right] = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{-h}{(x+h)x} \cdot \frac{1}{h} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}$$

Jadi $f'$ adalah fungsi yang diberikan oleh $f'(x) = -1/x^2$ Daerah asalnya adalah semua bilangan riil kecuali $x = 0$. ■

**BENTUK ADALAH SEGALANYA**

Kita [illegible] $x$ [illegible] $c$ pada Contoh 3, $F$ sebagai pengganti $f$ pada [illegible] dan $s - c$ [illegible] pengganti $h$ pada Contoh 5. [illegible] yang kita [illegible] hanyalah [illegible] selera saja.

"Ahli Matematika tidak mempelajari obyek, [illegible] mereka dengan [illegible] dapat [illegible] beberapa [illegible] relasinya tetap tidak berubah. Bagi mereka [illegible] tertarik kepada bentuk saja."

[illegible]

**CONTOH 4** Cari turunan dari $F$ jika $F(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$.

*Penyelesaian*

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Sejauh ini anda telah memperhatikan bahwa pencarian turunan selalu menyangkut pengambilan limit suatu hasilbagi di mana pembilang dan penyebut keduanya menuju nol. Tugas kita adalah menyederhanakan hasilbagi ini sehingga kita dapat mencoret faktor $h$ dari pembilang dan penyebut, jadi memungkinkan kita untuk menghitung limit. Dalam contoh yang sekarang, ini dapat dilaksanakan dengan merasionalkan pembilang.

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \left[ \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

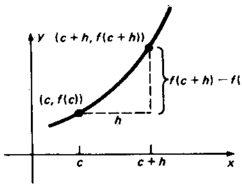
Jadi, $F'$ – turunan dari $F$ – diberikan oleh $F'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Daerah asalnya adalah $(0, \infty)$. ■

**BENTUK-BENTUK YANG SETARA UNTUK TURUNAN** Tidak ada yang keramat tentang pemakaian huruf $h$ dalam mendefinisikan $f'(c)$. Misalkan, perhatikan bahwa

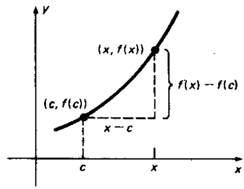
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s}$$




GAMBAR 1




GAMBAR 2

Perubahan yang lebih radikal, tetapi masih tetap hanya suatu perubahan cara penulisan, mungkin dipahami dengan membandingkan Gambar 1 dan Gambar 2. Perhatikan bagaimana $x$ mengambil tempat $c + h$, sehingga $x - c$ menggantikan $h$. Jadi,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Dalam nada yang serupa, kita boleh menuliskan

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$= \lim_{p \to x} \frac{f(p) - f(x)}{p - x}$$

Perhatikan bahwa dalam semua kasus, bilangan pada mana $f'$ dihitung dipegang tetap selama operasi limit.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

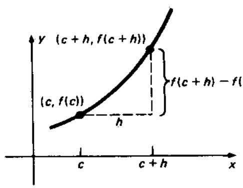
Jadi, $F'$ – turunan dari $F$– diberikan oleh $F'(x) = 1/2\sqrt{x}$. Daerah asalnya adalah $(0, \infty)$. ■

**BENTUK-BENTUK YANG SETARA UNTUK TURUNAN** Tidak ada yang keramat tentang pemakaian huruf $h$ dalam mendefinisikan $f'(c)$. Misalkan, perhatikan bahwa

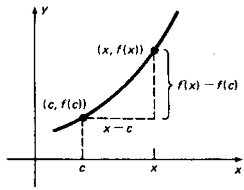
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

$$= \lim_{p \to 0} \frac{f(c+p) - f(c)}{p}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(c+s) - f(c)}{s}$$




GAMBAR 1




GAMBAR 2

Perubahan yang lebih radikal, tetapi masih tetap hanya suatu perubahan cara penulisan, mungkin dipahami dengan membandingkan Gambar 1 dan Gambar 2. Perhatikan bagaimana $x$ mengambil tempat $c + h$, sehingga $x - c$ menggantikan $h$. Jadi,

[illegible]

Dalam nada yang serupa, kita boleh menuliskan

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

$$= \lim_{p \to x} \frac{f(p) - f(x)}{p - x}$$

Perhatikan bahwa dalam semua kasus, bilangan pada mana $f'$ dihitung dipegang tetap selama operasi limit.

**CONTOH 5** Gunakan hasil dalam kotak di atas untuk mencari $g'(c)$, jika $g(x) = 2/(x+3)$.

***Penyelesaian***

$$g'(c) = \lim_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{2}{c+3}}{x-c}$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\frac{2(c+3)-2(x+3)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c} \left[\frac{-2(x-c)}{(x+3)(c+3)} \cdot \frac{1}{x-c}\right]$$

$$= \lim_{x\to c} \frac{-2}{(x+3)(c+3)} = \frac{-2}{(c+3)^2}$$

Di sini kita memanipulasikan hasil bagi sampai kita dapat mencoret suatu faktor $x - c$ dari pembilang dan penyebut. Kemudian kita dapat menghitung limit tersebut. ■

**CONTOH 6** Masing-masing yang berikut adalah suatu turunan, tetapi dari fungsi apa dan di titik mana?

$$\text{(a)} \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h} \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 3} \frac{\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{3}}{x-3}$$

***Penyelesaian***

(a) Ini adalah turunan dari $f(x) = x^2$ di $x = 4$.
(b) Ini adalah turunan dari $f(x) = 2/x$ di $x = 3$. ■

**KETERDIFERENSIALAN MENUNJUKKAN KEKONTINUAN** Jika sebuah kurva mempunyai sebuah garis singgung di sebuah titik, maka kurva itu tidak dapat melompat atau sangat berayun di titik tersebut. Perumusan yang persis dari kenyataan ini merupakan sebuah teorema penting.

> ***Teorema A***
>
> **Jika $f'(c)$ ada, maka $f$ kontinu di $c$.**

***Bukti*** Kita perlu menunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Sekarang

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c), \qquad x \neq c$$

Karenanya

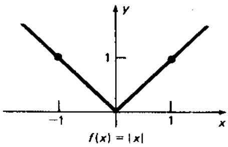
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} \left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c)\right]$$

$$= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x\to c} (x-c)$$

$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$

$$= f(c)$$

■




**GAMBAR 3**

Kebalikan teorema ini tidak benar. Jika fungsi $f$ kontinu di $c$, maka tidak berarti bahwa $f$ mempunyai turunan di $c$. Ini dengan mudah dapat dilihat dengan memandang $f(x) = |x|$ di titik asal (Gambar 3). Fungsi ini pasti kontinu di nol, tetapi tidak mempunyai turunan di sana. Untuk melihat yang belakangan, amati bahwa

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

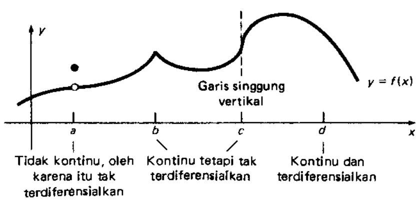
Limit ini tidak ada karena

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

sedangkan

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Argumentasi yang baru disajikan memperlihatkan bahwa di sebarang titik di mana fungsi mempunyai sebuah sudut yang tajam, maka fungsi tersebut kontinu tetapi tidak terdiferensialkan. Grafik dalam Gambar 4 menunjukkan sejumlah kemungkinan.




**GAMBAR 4**

Kita tegaskan dalam Gambar 4 bahwa turunan tidak ada di titik $c$ di mana garis singgungnya tegak (vertikal). Ini disebabkan

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

bertambah tanpa batas bila $h \to 0$. Hal ini berkaitan dengan kenyataan bahwa kemiringan suatu garis vertikal tak terdefinisi.

## SOAL-SOAL 3.2

Dalam Soal-soal 1-4, gunakan definisi

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

untuk mencari turunan yang ditunjuk (lihat Contoh 1 dan 2).

1. $f'(3)$ jika $f(x) = x^2 - x$
2. $f'(-2)$ jika $f(x) = x^3$
3. $f'(-1)$ jika $f(x) = x^3 + 2x^2$
4. $f'(4)$ jika $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$

Dalam Soal-soal 5-22, gunakan $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}[f(x+h) - f(x)]/h$ untuk mencari turunan di $x$ (lihat Contoh 3 dan 4).

5. $f(x) = 5x - 4$
6. $f(x) = ax + b$
7. $f(x) = 8x^2 - 1$
8. $f(x) = x^2 + 3x + 4$
9. $f(x) = ax^2 + bx + c$
10. $f(x) = 2x^3$
11. $f(x) = x^3 - 2x$
12. $f(x) = x^4$
13. $g(x) = \dfrac{3}{5x}$
14. $g(x) = \dfrac{2}{x+6}$
15. $F(x) = \dfrac{6}{x^2+1}$
16. $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
17. $G(x) = \dfrac{2x-1}{x-4}$
18. $G(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x}$
19. $g(x) = \sqrt{3x}$
20. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$
21. $H(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-2}}$
22. $H(x) = \sqrt{x^2+4}$

Dalam Soal-soal 23-26, gunakan $f'(x) = \lim\limits_{t\to x}[f(t) - f(x)]/[t-x]$ untuk mencari $f'(x)$ (lihat Contoh 5).

23. $f(x) = x^2 - 3x$
24. $f(x) = x^3 + 5x$
25. $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$
26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

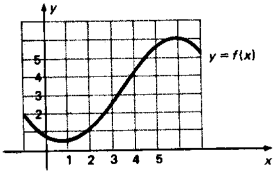
Dalam Soal-soal 27-36, limit yang diberikan adalah suatu turunan, tetapi dari fungsi apa dan di titik mana? (lihat Contoh 6).

27. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(5+h)^3 - 2(5)^3}{h}$
28. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 + 2(3+h) - 15}{h}$
29. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
30. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3+x-30}{x-3}$
31. $\lim\limits_{t\to x} \dfrac{t^2-x^2}{t-x}$
32. $\lim\limits_{p\to x} \dfrac{p^3-x^3}{p-x}$
33. $\lim\limits_{x\to t} \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{2}{t}}{x-t}$
34. $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{\sin x - \sin y}{x-y}$

35. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$

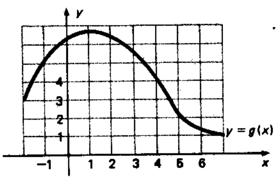
36. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\tan(t + h) - \tan t}{h}$

37. Dari gambar 5, taksir $f'(0), f'(2), f'(5)$, dan $f'(7)$.




GAMBAR 5

38. Dari gambar 6, taksir $g'(-1), g'(1), g'(4)$, dan $g'(6)$.

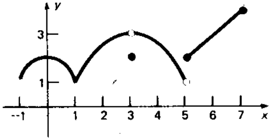



GAMBAR 6

39. Sketsakan grafik $y = f'(x)$ pada $-1 < x < 7$ untuk fungsi $f$ dari Soal 37.

40. Sketsakan grafik $y = g'(x)$ pada $-1 < x < 7$ untuk fungsi $g$ dari Soal 38.

41. Pandang fungsi $y = f(x)$, yang grafiknya disketsakan pada gambar 7.




GAMBAR 7

(a) Taksir $f(2), f'(2), f(0,5)$, dan $f'(0,5)$.

(b) Taksir laju perubahan rata-rata dalam $f$ pada selang $0,5 \leqslant x \leqslant 2,5$.

(c) Pada selang $-1 < x < 7$, di mana $\lim_{u \to x} f(u)$ tidak ada?

(d) Pada selang $-1 < x < 7$, di mana $f$ gagal untuk kontinu?

(e) Pada selang $-1 < x < 7$, di mana $f$ gagal mempunyai suatu turunan?

(f) Pada selang $-1 < x < 7$, di mana $f'(x) = 0$?

(g) Pada selang $-1 < x < 7$, di mana $f'(x) = 1$?

42. Diketahui $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x$ dan $y$. Tunjukkan bahwa bila $f'(0)$ ada, maka $f'(a)$ ada dan $f'(a) = f(a)f'(0)$.

43. Diketahui

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{jika } x < 2 \\ x^2 & \text{jika } x \geq 2 \end{cases}$$

Tentukan $m$ dan $b$ sedemikian rupa sehingga $f$ dapat didiferensialkan di mana saja.

44. **Turunan simetris** $f_s(x)$ didefinisikan dengan

$$f_s(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x - h)}{2h}$$

Tunjukkan bahwa bila $f'(x)$ ada, maka $f_s(x)$ ada, tetapi tidak demikian sebaliknya.

45. Diketahui $f$ terdiferensialkan dan $f'(x_0) = m$. Tentukan $f'(-x_0)$ bila (a) $f$ adalah fungsi ganjil; (b) $f$ adalah fungsi genap.

46. Buktikan bahwa turunan dari suatu fungsi ganjil adalah suatu fungsi genap dan turunan suatu fungsi genap adalah fungsi ganjil.

## 3.3 Aturan Pencarian Turunan

Proses pencarian turunan suatu fungsi langsung dari definisi turunan, yakni dengan menyusun hasilbagi selisih

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

dan menghitung limitnya, memakan-waktu dan membosankan. Kita akan mengembangkan alat yang akan memungkinkan kita untuk memperpendek proses yang berkepanjangan ini yang nyatanya akan memungkinkan kita untuk mencari turunan dari fungsi-fungsi yang tampak rumit dengan segera.

Ingat kembali bahwa turunan suatu fungsi $f$ adalah fungsi lain $f'$. Misalnya, jika $f(x) = x^2$ adalah rumus untuk $f$, maka $f'(x) = 2x$ adalah rumus untuk $f'$. Pengambilan turunan dari $f$ (pendiferensialan $f$) adalah pengoperasian pada $f$ untuk menghasilkan $f'$ Sering kali kita memakai huruf $D$ untuk menunjukkan operasi ini. Jadi kita menuliskan $Df = f'$, $Df(x) = f'(x)$, atau (dalam contoh yang disebutkan di atas) $D(x^2) = 2x$. Semua teorema di bawah dinyatakan dalam cara penulisan fungsional dan dalam cara penulisan operator $D$.

**KONSTANTA DAN ATURAN PANGKAT** Grafik fungsi konstanta $f(x) = k$ merupakan sebuah garis horisontal (Gambar 1), sehingga mempunyai kemiringan nol di mana-mana. Ini adalah satu cara untuk memahami teorema pertama kita.

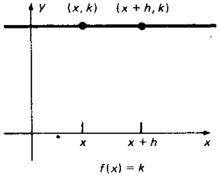
*Teorema A*

**(Aturan Fungsi Konstanta).** Jika $f(x) = k$ dengan $k$ suatu konstanta maka untuk sebarang $x$, $f'(x) = 0$ – yakni,

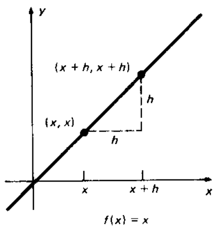
$$D(k) = 0$$

***Bukti***

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \qquad \blacksquare$$




GAMBAR 1




GAMBAR 2

Grafik $f(x) = x$ merupakan sebuah garis yang melalui titik asal dengan kemiringan 1 (Gambar 2); sehingga kita dapat menduga turunan fungsi ini adalah 1 untuk semua $x$.

***Teorema B***

**(Aturan Fungsi Identitas).** Jika $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$ – yakni,

$$D(x) = 1$$

***Bukti***

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

■

Sebelum menyatakan teorema kita berikutnya, kita ingatkan kembali sesuatu dari aljabar: bagaimana memangkatkan suatu binomial.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n$$

***Teorema C***

**(Aturan Pangkat).** Jika $f(x) = x^n$, dengan $n$ bilangan-bilangan bulat positif, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ – yakni,

$$D(x^n) = nx^{n-1}$$

***Bukti***

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}$$

Di dalam kurung siku, semua suku kecuali yang pertama mempunyai $h$ sebagai faktor, sehingga masing-masing suku ini mempunyai limit nol bila $h$ mendekati nol. Jadi

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

■

Sebagai ilustrasi dari Teorema C, perhatikan bahwa

$$D(x^3) = 3x^2, \qquad D(x^9) = 9x^8, \qquad D(x^{100}) = 100x^{99}$$

***D* ADALAH SEBUAH OPERATOR LINEAR** Operator $D$ berfungsi sangat baik bilamana diterapkan pada kelipatan konstanta fungsi atau pada jumlah fungsi.

> ***Teorema D***
>
> **(Aturan Kelipatan Konstanta).** Jika $k$ suatu konstanta dan $f$ suatu fungsi yang terdiferensialkan, maka $(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$ — yakni,
>
> $$D[k \cdot f(x)] = k \cdot Df(x)$$

Dengan kata-kata, ini mengatakan bahwa *suatu konstanta k dapat diseberangkan melewati operator D.*

***Bukti*** Andaikan $F(x) = k \cdot f(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} k \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = k \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= k \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Langkah sebelum yang terakhir adalah kritis. Kita dapat menggeser $k$ melewati tanda limit karena Teorema Limit Utama (Bagian 3). ■

Contoh-contoh yang mengilustrasikan hasil-hasil ini adalah

$$D(-7x^3) = -7D(x^3) = -7 \cdot 3x^2 = -21x^2$$

dan $$D(\tfrac{4}{3}x^9) = \tfrac{4}{3}D(x^9) = \tfrac{4}{3} \cdot 9x^8 = 12x^8$$

> ***Teorema E***
>
> **(Aturan Jumlah).** Jika $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ — yakni,
>
> $$D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$$

Dengan kata-kata, ini mengatakan bahwa *turunan dari suatu jumlah adalah jumlah dari turunan-turunan.*

***Bukti*** Andaikan $F(x) = f(x)/g(x)$. Maka

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Lagi-lagi, langkah sebelum yang terakhir adalah yang kritis. Ini dibenarkan dengan melihat pada Teorema Limit Utama (Bagian 4). ■

Sebarang operator $L$ dengan sifat-sifat yang dinyatakan dalam Teorema D dan E disebut **linear**, yakni, $L$ adalah **linear** jika:

1. $L(kf) = kL(f)$, $k$ konstanta;

2. $L(f + g) = L(f) + L(g)$.

**KELINEARAN**

**Arti pokok dari kata *linear* yang dipergunakan dalam matematika adalah sebagaimana dijelaskan pada bagian ini. Suatu operator $L$ dikatakan linear bila memenuhi dua syarat pokok:**

- $L(ku) = kL(u)$
- $L(u + v) = L(u) + L(v)$

**Operator-operator linear memainkan peran penting dalam pelajaran *aljabar linear* yang kelak akan Anda temui dalam buku ini.**

**Sayangnya, fungsi-fungsi yang berbentuk $f(x) = mx + b$ disebut juga fungsi linear (karena hubungannya dengan garis-garis lurus) walaupun sebenarnya bentuk itu tidak linear dalam pengertian operator, seperti terlihat sebagai berikut:**

$$f(kx) = mkx + b$$

**di mana**

$$kf(x) = k(mx + b)$$

**Jadi, $f(kx) \neq kf(x)$ kecuali $b$ suatu saat nol.**

Operator linear akan muncul berulang-ulang dalam buku ini; $D$ merupakan sebuah contoh khas. Sebuah operator linear selalu memenuhi aturan selisih $L(f - g) = L(f) - L(g)$ yang dinyatakan berikutnya untuk $D$.

*Teorema F*

**(Aturan Selisih). Jika $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang terdiferensialkan, maka $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$ – yakni,**

$$D[f(x) - g(x)] = Df(x) - Dg(x)$$

***Bukti***

$$D[f(x) - g(x)] = D[f(x) + (-1)g(x)]$$

$$= Df(x) + D[(-1)g(x)] \qquad \text{(Teorema E)}$$

$$= Df(x) + (-1)Dg(x) \qquad \text{(Teorema D)}$$

$$= Df(x) - Dg(x) \qquad \blacksquare$$

**CONTOH 1** Cari turunan dari $5x^2 + 7x - 6$ dan $4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16$.

***Penyelesaian***

$$\begin{aligned} D(5x^2 + 7x - 6) &= D(5x^2 + 7x) - D(6) && \text{(Teorema F)} \\ &= D(5x^2) + D(7x) - D(6) && \text{(Teorema E)} \\ &= 5D(x^2) + 7D(x) - D(6) && \text{(Teorema D)} \\ &= 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 && \text{(Teorema C, B, A)} \\ &= 10x + 7 \end{aligned}$$

Untuk mencari turunan berikutnya, kita perhatikan bahwa teorema-teorema pada jumlah dan selisih meluas sampai sejumlah terhingga suku. Jadi,

$$\begin{aligned} &D(4x^6 - 3x^5 - 10x^2 + 5x + 16) \\ &\quad = D(4x^6) - D(3x^5) - D(10x^2) + D(5x) + D(16) \\ &\quad = 4D(x^6) - 3D(x^5) - 10D(x^2) + 5D(x) + D(16) \\ &\quad = 4(6x^5) - 3(5x^4) - 10(2x) + 5(1) + 0 \\ &\quad = 24x^5 - 15x^4 - 20x + 5 \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Metode pada Contoh 1 memungkinkan kita untuk mencari turunan sebarang polinom. Jika anda mengetahui Aturan Pangkat dan melakukan apa yang datang secara alamiah, hampir pasti bahwa anda akan memperoleh hasil yang benar. Jika anda dapat menulis jawaban tanpa langkah lanjutan, itu pun baik.

**ATURAN HASILKALI DAN HASILBAGI** Sekarang kita siap untuk suatu kejutan. Turunan hasilkali fungsi-fungsi *tidak* sama dengan hasilkali turunan fungsi-fungsi.

***Teorema G***

**(Aturan Hasilkali).** Andaikan $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan, maka $(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$, yakni,

$$D[f(x)g(x)] = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$$

**PENGHAFALAN**

**Berapa orang berpendapat bahwa menghafal adalah ketinggalan zaman, satu-satunya yang terpenting dalam matematika adalah berfikir. Mereka salah. Beberapa hal (termasuk aturan-aturan pada bagian ini) sedapat mungkin harus menjadi bagian dari organ otak kita yang dapat kita pergunakan tanpa harus berfikir.**

**"Peradaban akan maju dengan mengembangkan sejumlah operasi-operasi penting yang dapat kita lakukan tanpa harus memikirkannya".**

**Alfred N. Whitehead**

Ini harus dihafalkan dalam kata-kata sebagai berikut: *Turunan hasilkali dua fungsi adalah turunan kedua yang pertama dikalikan ditambah dengan turunan pertama yang kedua dikalikan.*

***Bukti*** Andaikan $f(x) = f(x)g(x)$. Maka

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left[ f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x)
\end{aligned}$$

Pertama, turunan yang baru saja diberikan mengandalkan pada teknik penambahan dan pengurangan yang sama, yaitu $f(x + h)g(x)$. Kedua, pada akhirnya kita gunakan kenyataan bahwa

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

Ini hanya merupakan terapan Teorema 3.2A, yang mengatakan bahwa keterdiferensialan pada suatu titik menunjukkan kekontinuan di titik tersebut. ■

**CONTOH 2** Gunakan Aturan Hasilkali untuk mencari turunan $(3x^2 - 5)(2x^4 - x)$. Periksa jawab dengan mengerjakan soal itu secara lain.

***Penyelesaian***

$$
\begin{aligned}
D[(3x^2-5)(2x^4-x)] &= (3x^2-5)D(2x^4-x)+(2x^4-x)D(3x^2-5)\\
&= (3x^2-5)(8x^3-1)+(2x^4-x)(6x)\\
&= 24x^5-3x^2-40x^3+5+12x^5-6x^2\\
&= 36x^5-40x^3-9x^2+5
\end{aligned}
$$

Untuk memeriksa, pertama kita kalikan dan kemudian ambil turunan.

$$(3x^2-5)(2x^4-x)=6x^6-10x^4-3x^3+5x$$

Jadi,

$$
\begin{aligned}
D[(3x^2-5)(2x^4-x)] &= D(6x^6)-D(10x^4)-D(3x^3)+D(5x)\\
&= 36x^5-40x^3-9x^2+5
\end{aligned}
$$

■

***Teorema H***

**(Aturan Hasilbagi). Andaikan $f$ dan $g$ fungsi-fungsi yang dapat didiferensialkan dengan $g(x) \neq 0$. Maka**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

**Yaitu,**

$$D\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)Df(x)-f(x)Dg(x)}{g^2(x)}$$

Kami tekankan agar anda menghafalkan ini dalam kata-kata sebagai berikut: *Turunan suatu hasilbagi adalah sama dengan penyebut kali turunan pembilang dikurangi pembilang kali turunan penyebut, seluruhnya dibagi dengan kuadrat penyebutnya.*

***Bukti*** Andaikan $f(x)=f(x)/g(x)$. Maka

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h}\cdot\frac{1}{g(x)g(x+h)}
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[ \frac{g(x)f(x + h) - g(x)f(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x + h)}{h} \frac{1}{g(x)g(x + h)} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \left[ g(x) \frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right] \frac{1}{g(x)g(x + h)} \right\}$$

$$= [g(x)f'(x) - f(x)g'(x)] \frac{1}{g(x)g(x)}$$

■

**CONTOH 3** Cari turunan dari $\dfrac{(3x - 5)}{(x^2 + 7)}$.

***Penyelesaian***

$$D\left[\frac{3x - 5}{x^2 + 7}\right] = \frac{(x^2 + 7)D(3x - 5) - (3x - 5)D(x^2 + 7)}{(x^2 + 7)^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 7)(3) - (3x - 5)(2x)}{(x^2 + 7)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 10x + 21}{(x^2 + 7)^2}$$

■

**CONTOH 4** Cari $Dy$ jika $y = \dfrac{2}{x^4 + 1} + \dfrac{3}{x}$.

***Penyelesaian***

$$Dy = D\left(\frac{2}{x^4 + 1}\right) + D\left(\frac{3}{x}\right)$$

$$= \frac{(x^4 + 1)D(2) - 2D(x^4 + 1)}{(x^4 + 1)^2} + \frac{xD(3) - 3D(x)}{x^2}$$

$$= \frac{(x^4 + 1)(0) - (2)(4x^3)}{(x^4 + 1)^2} + \frac{(x)(0) - (3)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{-8x^3}{(x^4 + 1)^2} - \frac{3}{x^2}$$

■

**CONTOH 5** Buktikan bahwa Aturan Pangkat berlaku untuk pangkat bulat negatif; yaitu,

$$\boxed{D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}}$$

***Penyelesaian***

$$D(x^{-n}) = D\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

■

Kita lihat sebagaimana bagian dari Contoh 4 bahwa $D(3/x) = -3/x^2$. Sekarang kita telah memiliki cara lain untuk memperlihatkan hal yang sama.

$$D\left(\frac{3}{x}\right) = D(3x^{-1}) = 3D(x^{-1}) = 3(-1)x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

## SOAL-SOAL 3.3

Dalam Soal-soal 1-44, cari $Dy$ menggunakan aturan-aturan dari pasal ini.

1. $y = 2x^3$
2. $y = 3x^4$
3. $y = \pi x^2$
4. $y = \sqrt{2}x^5$
5. $y = -3x^{-3}$
6. $y = 4x^{-2}$
7. $y = \dfrac{-2}{x^4}$
8. $y = \dfrac{-8}{x^{10}}$
9. $y = \dfrac{3}{5x^5}$
10. $y = \dfrac{2}{3x^6}$
11. $y = -x^3 + 2x$
12. $y = 2x^4 - 3x$
13. $y = -x^4 + 3x^2 - 6x + 1$
14. $y = 11x^4 - 3x + 19$
15. $y = 5x^6 - 3x^5 + 11x - 9$
16. $y = 3x^7 - 9x^2 + 21$
17. $y = 3x^{-5} + 2x^{-3}$
18. $y = 2x^{-6} + x^{-1}$
19. $y = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$
20. $y = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}$
21. $y = \dfrac{1}{2x} + 2x$
22. $y = \dfrac{2}{3x} - \dfrac{2}{3}$
23. $y = x(x^2 + 1)$
24. $y = 3x(x^3 - 1)$
25. $y = (2x + 1)^2$
26. $y = (-3x + 2)^2$
27. $y = (x^2 + 2)(x^3 + 1)$
28. $y = (x^4 - 1)(x^2 + 1)$
29. $y = (x^2 + 17)(x^3 - 3x + 1)$
30. $y = (x^4 + 2x)(x^3 + 2x^2 + 1)$
31. $y = (5x^2 - 7)(3x^2 - 2x + 1)$
32. $y = (3x^2 + 2x)(x^4 - 3x + 1)$
33. $y = \dfrac{1}{3x^2 + 1}$
34. $y = \dfrac{2}{5x^2 - 1}$

35. $y = \dfrac{1}{4x^2 - 3x + 9}$

36. $y = \dfrac{4}{2x^3 - 3x}$

37. $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

38. $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$

39. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{3x + 5}$

40. $y = \dfrac{5x - 4}{3x^2 + 1}$

41. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

42. $y = \dfrac{5x^2 + 2x - 6}{3x - 1}$

43. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

44. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

45. Jika $f(0) = 4$, $f'(0) = -1$, $g(0) = -3$, dan $g'(0) = 5$, cari (a) $(f \cdot g)'(0)$; (b) $(f + g)'(0)$; (c) $(f/g)'(0)$.

46. Jika $f(3) = 7$, $f'(3) = 2$, $g(3) = 6$, dan $g'(3) = -10$, cari (a) $(f - g)'(3)$; (b) $(f \cdot g)'(3)$; (c) $(g/f)'(3)$.

47. Gunakan Aturan Hasilkali untuk menunjukkan bahwa $D[f(x)]^2 = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$.

48. Kembangkan suatu aturan untuk $D[f(x)g(x)h(x)]$.

49. Cari persamaan garis singgung pada $y = 3x^2 - 6x + 1$ di titik $(1, -2)$.

50. Cari persamaan garis singgung pada $y = 1/(x^2 + 1)$ di titik $(1, \frac{1}{2})$.

51. Cari semua titik pada grafik $y = x^3 - x^2$ di mana garis singgung mendatar.

52. Cari semua titik pada grafik $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - x$ di mana garis singgung mempunyai kemiringan 1.

53. Tinggi $s$ dalam kaki dari sebuah bola di atas tanah pada saat $t$ detik diberikan oleh $s = -16t^2 + 40t + 100$.
(a) Berapa kecepatan sesaatnya pada $t = 2$?
(b) Bilamana kecepatan sesaatnya 0?

54. Sebuah bola menggelinding sepanjang bidang miring sehingga jarak $s$ dari titik awal setelah $t$ detik adalah $s = 4{,}5t^2 + 2t$ kaki. Kapankah kecepatan sesaatnya akan sebesar 30 kaki/detik?

55. Terdapat dua garis singgung pada kurva $y = 4x - x^2$ yang melalui titik (2, 5). Cari persamaan garis-garis tersebut. *Petunjuk:* Andaikan $(x_0, y_0)$ adalah titik singgungnya. Cari dua syarat yang harus dipenuhi oleh $(x_0, y_0)$.

56. Seorang penjelajah angkasa bergerak dari kiri ke kanan sepanjang kurva $y = x^2$. Bilamana ia mematikan mesinnya, ia akan bergerak sepanjang garis singgung pada titik di mana ia saat itu berada. Pada titik mana ia harus mematikan mesin agar mencapai titik (4, 15)?

57. Seekor lalat merayap dari kiri ke kanan di sepanjang puncak kurva $y=7-x^2$. Seekor laba-laba menunggunya pada titik (4,0). Tentukan jarak antara kedua serangga itu pada saat mereka pertama kali saling melihat.

58. Diketahui $P(a, b)$ suatu titik pada kurva $y = 1/x$ di kuadran pertama, dan garis singgung pada $P$ memotong sumbu $x$ di $A$. Tunjukkan bahwa segitiga $AOP$ samakaki dan tentukan luasnya.

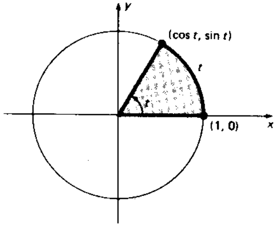
59. Jari-jari suatu buah semangka bulat, tumbuh pada tingkat yang konstan 2 cm tiap minggu. Ketebalan kulitnya selalu sepersepuluh dari jari-jarinya. Berapa laju pertumbuhan volume kulit semangka tersebut pada akhir minggu ke lima?

## 3.4 Turunan Sinus dan Kosinus

Dunia modern kita berjalan di atas roda. Pertanyaan-pertanyaan tentang roda yang berputar dan kecepatan titik padanya secara tak terelakkan menuju ke pengkajian sinus dan kosinus dan turunan-turunannya. Agar siap untuk pengkajian ini akan sangat baik untuk menelaah ulang Pasal 2.3. Gambar 1 mengingatkan kita pada definisi fungsi-fungsi sinus dan kosinus. Dalam yang berikut ini, $t$ harus dibayangkan sebagai bilangan yang mengukur panjang busur pada lingkaran satuan, atau sama saja, sebagai bilangan radian dalam sudut yang berpadanan. Jadi, $f(t) = \sin t$ dan $g(t) = \cos t$ adalah fungsi-fungsi yang mempunyai daerah asal dan daerah hasil berupa himpunan bilangan riil. Kita dapat memikirkan masalah pencarian turunan-turunannya.

**RUMUS-RUMUS TURUNAN** Kita memilih untuk memakai $x$ ketimbang $t$ sebagai variabel dasar kita. Untuk mencari $D(\sin x)$, kita bersandar pada definisi turunan dan menggunakan identitas penambahan untuk $\sin(x + h)$.

$$\begin{aligned} D(\sin x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left( -\sin x \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= (-\sin x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos h}{h}\right] + (\cos x)\left[\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\right] \end{aligned}$$




GAMBAR 1

| $h$ | $\frac{1-\cos h}{h}$ | $\frac{\sin h}{h}$ |
|---|---|---|
| 1,0 | 0,45970 | 0,84147 |
| 0,5 | 0,24483 | 0,95885 |
| 0,1 | 0,04996 | 0,99833 |
| 0,01 | 0,00500 | 0,99998 |
| ↓ | ↓ | ↓ |
| 0 | ? | ? |
| ↑ | ↑ | ↑ |
| −0,01 | −0,00500 | 0,99998 |
| −0,1 | −0,04996 | 0,99833 |
| −0,5 | −0,24483 | 0,95885 |
| −1,0 | −0,45970 | 0,84147 |

GAMBAR 2

Untuk mengakhiri turunan kita, kami berikan dua buah limit untuk Anda evaluasi. Sebuah kalkulator menyediakan tabel dalam Gambar 2. Ini menunjukkan, dan kelak dalam pasal ini, kita akan membuktikan bahwa

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0 \qquad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

Jadi,

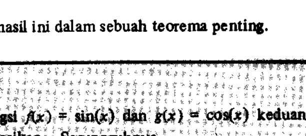
$$D(\sin x) = (-\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Demikian pula,

$$\begin{aligned} D(\cos x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left( -\cos x \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= (-\cos x) \cdot 0 - (\sin x) \cdot 1 \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

**DAPATKAH ANDA TERKA?**

**Kurva dengan garis nyata di bawah ini adalah grafik dari $y = \sin x$. Perhatikan bahwa kemiringan (koefisien arah garis singgung)-nya 1 pada 0, 0 pada $\pi/2$, $-1$ pada $\pi$, dan seterusnya. Apabila kita gambarkan fungsi kemiringannya (turunannya), kita peroleh kurva dengan garis titik-titik. Dapatkah Anda terka bahwa $D \sin x = \cos x$?**




Kita ringkaskan hasil-hasil ini dalam sebuah teorema penting.

***Teorema A***

**Fungsi-fungsi $f(x) = \sin(x)$ dan $g(x) = \cos(x)$ keduanya dapat didiferensiasikan. Sesungguhnya**

$$D(\sin x) = \cos x \qquad D(\cos x) = -\sin x$$

**CONTOH 1** Cari $D(3 \sin x - 2 \cos x)$.

***Penyelesaian***

$$\begin{aligned} D(3 \sin x - 2 \cos x) &= 3\, D(\sin x) - 2\, D(\cos x) \\ &= 3 \cos x + 2 \sin x \end{aligned}$$

■

**CONTOH 2** Cari $D(\tan x)$.

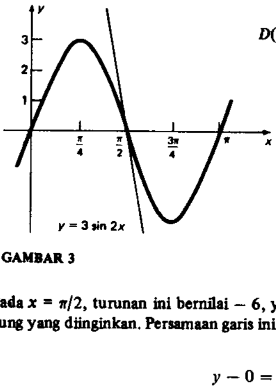
***Penyelesaian***

$$\begin{aligned} D(\tan x) &= D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x\, D(\sin x) - \sin x\, D(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

■

**CONTOH 3** Cari persamaan garis singgung pada grafik $y = 3 \sin 2x$ di titik $(\pi/2, 0)$ (lihat Gambar 3).

***Penyelesaian*** Kita memerlukan turunan dari $\sin 2x$; sayangnya, kita hanya tahu bagaimana mencari turunan dari $\sin x$. Tetapi, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$. Jadi,




GAMBAR 3

$$\begin{aligned} D(3 \sin 2x) &= D(6 \sin x \cos x) \\ &= 6\, D(\sin x \cos x) \\ &= 6[\sin x\, D(\cos x) + \cos x\, D(\sin x)] \\ &= 6[(\sin x)(-\sin x) + \cos x \cos x] \\ &= 6[\cos^2 x - \sin^2 x] \\ &= 6 \cos 2x \end{aligned}$$

Pada $x = \pi/2$, turunan ini bernilai $-6$, yang karena itu merupakan kemiringan* garis singgung yang diinginkan. Persamaan garis ini adalah

$$y - 0 = -6\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

■

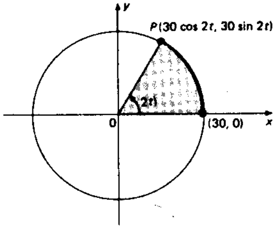
**CONTOH 4** Perhatikan kincir ferris yang jari-jarinya 30 kaki, berputar berlawanan arah perputaran jarum jam dengan kecepatan sudut 2 radian/detik. Seberapa cepat dudukan pada pelek naik (dalam arah tegak) pada saat ia berada 15 kaki di atas garis mendatar (horisontal) yang melalui pusat kincir?

*Di sini kemiringan menerjemahkan pengertian "slope"; penulis lain ada yang menggunakan "tanjakan", "lereng".

***Penyelesaian*** Kita dapat memisalkan bahwa kincir berpusat di titik asal dan bahwa dudukan $P$ berada di $(30, 0)$ pada saat $t = 0$ (Gambar 4). Jadi pada saat $t$, $P$ telah bergerak melalui sudut $2t$ radian, sehingga mempunyai koordinat $(30 \cos 2t, 30 \sin 2t)$. Laju $P$ naik adalah turunan koordinat vertikal $30 \sin 2t$ diukur pada suatu nilai $t$ yang sesuai. Menurut Contoh 3,

$$D(30 \sin 2t) = 60 \cos 2t$$

Nilai $t$ yang sesuai untuk penghitungan turunan ini adalah $t = \pi/12$ karena $30 \sin(2\pi/12) = 15$. Kita simpulkan bahwa pada $\pi/12$, dudukan $P$ naik pada




$$60 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 60\sqrt{3}/2 \approx 51{,}96 \text{ kaki/detik}$$

■

GAMBAR 4

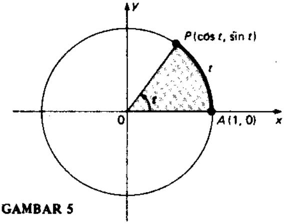
PEMBUKTIAN DUA PERNYATAAN LIMIT Segala sesuatu yang telah kita lakukan dalam pasal ini tergantung pada dua pernyataan limit,

$$\boxed{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \qquad \lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t} = 0}$$

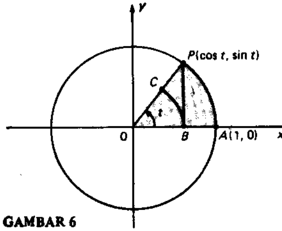
Mereka memerlukan bukti.

***Bukti*** Andaikan bahwa $t > 0$ dan pandang diagram (yang sekarang sudah dikenal) pada Gambar 5. Perhatikan bahwa bila $t \to 0$, titik $P$ bergerak ke arah $(1, 0)$, sehingga

$$\lim_{t \to 0} \cos t = 1 \qquad \lim_{t \to 0} \sin t = 0$$




GAMBAR 5




GAMBAR 6

Selanjutnya, untuk $-\pi/2 < t < \pi/2$, $t \neq 0$, gambarkanlah potongan garis vertikal $BP$ dan busur $BC$ seperti tampak dalam Gambar 6. (Bila $t < 0$, daerah yang terpotong akan merupakan pencerminan terhadap sumbu-$x$). Jelasnya,

$$\text{Luas (sektor } OBC) \leqslant \text{luas } (\Delta OBP) \leqslant \text{luas (sektor } OAP)$$

Dari rumus $\frac{1}{2}\, bh$ (luas suatu segitiga) dan $\frac{1}{2}r^2|t|$ (luas suatu sektor; lihat Soal 30 Bagian 2.3), kita peroleh

$$\tfrac{1}{2}(\cos t)^2\,|t| \leqslant \tfrac{1}{2}\cos t\,|\sin t\,|\tfrac{1}{2} \leqslant (1)^2\,|t\,|$$

atau setelah mengalikan dengan 2 dan dibagi dengan bilangan positif $|t|\cos t$ dan menyatakan $(\sin t)/t$ adalah positif.

$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq \frac{1}{\cos t}$$

**Dengan menggunakan Teorema** Apit, dari ketidaksamaan ganda ini akan diperoleh:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

sebagai hasil yang pertama.

Hasil kedua, dapat kita peroleh dengan mudah dari hasil yang pertama.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t}\,\frac{1+\cos t}{1+\cos t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{\lim\limits_{t\to 0}(1+\cos t)} \\
&= 1\cdot\frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

■

Walaupun penggunaan utama dua pernyataan limit ini adalah untuk membuktikan rumus-rumus turunan, kita juga dapat memakainya untuk menghitung limit-limit lain.

**CONTOH 5** Cari limit-limit berikut

$$\text{(a)}\ \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t} \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$$

*Penyelesaian*

$$\text{(a)}\ \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos t}{t}}{\dfrac{\sin t}{t}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{(b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{3}\cdot\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{3}\cdot 1 = \frac{5}{3}$$

Pada langkah sebelum yang terakhir, kita gunakan kenyataan bahwa bila $x \to 0$, $5x \to 0$. Jadi,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{5x \to 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

■

## SOAL-SOAL 3.4

Dalam Soal-soal 1-12, cari $Dy$.

1. $y = 3 \sin x - 5 \cos x$
2. $y = \sin x \cos x$
3. $y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$
4. $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
5. $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
6. $y = \sin^2 x$
7. $y = \dfrac{\sin x}{\sin x + \cos x}$
8. $y = \dfrac{\tan x}{\sin x - \cos x}$
9. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$
10. $y = x^2 \sin x$
11. $y = \dfrac{\cos x}{x}$
12. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x \sin x}$

[C] 13. Cari persamaan garis singgung pada $y = \sin x$ di $x = 1$.

14. Cari persamaan garis singgung pada $y = \tan x$ di $x = \pi/4$.

15. Pandang kincir ferris dari Contoh 4. Pada laju berapa dudukan pada pelek bergerak secara mendatar pada waktu $t = \pi/4$ detik (yaitu, pada waktu dudukan mencapai puncak kincir)?

16. Sebuah kincir ferris dengan jari-jari 20 kaki berputar berlawanan arah perputaran jarum jam pada kecepatan sudut sebesar 1 radian/detik. Satu dudukan pada pelek berada di (20, 0), pada saat $t = 0$.
(a) Berapa koordinatnya pada saat $t = \pi/6$?
(b) Seberapa cepat ia naik (secara tegak) pada saat $t = \pi/6$?
(c) Seberapa cepat ia naik (secara tegak) pada waktu ia naik pada laju yang tercepat?

Dalam Soal 17-22, ikuti prosedur dari Contoh 5 untuk mencari tiap limit.

17. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$
18. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(\frac{1}{2}x)}{3x}$
19. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan x}$
20. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cot x}{\csc x - 1}$
21. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x \cos x}$
22. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$

23. Perlihatkan bahwa kurva $y = \sqrt{2} \sin x$ dan $y = \sqrt{2} \cos x$ saling berpotongan tegak lurus pada sebuah titik tertentu dengan $0 < x < \pi/2$.

24. Pada saat $t$ detik, pusat sebuah pelampung gabus berada sejauh $2 \sin t$ sentimeter di atas (atau di bawah) permukaan air. Berapa kecepatan pelampung pada saat $t = 0, \pi/2, \pi$?

25. Gunakan definisi turunan untuk memperlihatkan bahwa $D(\sin x^2) = 2x \cos x^2$.

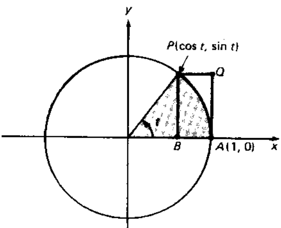
26. Gunakan definisi turunan untuk memperlihatkan bahwa $D(\sin 5x) = 5 \cos 5x$.

**27. Bila $x_0$ adalah harga positif terkecil dari $x$ di mana kurva-kurva $y = \sin x$ dan $y = \sin 2x$ berpotongan, tentukan $x_0$ dan juga sudut lancip yang dibentuk dari perpotongan kedua kurva pada $x_0$ (lihat Soal 28 pada Bagian 2.3).**

**28. Dari luas $(OBP) \leqslant$ luas $(OAP) \leqslant$ luas $(OBP)$ + luas $(ABPQ)$ dalam Gambar 7, tunjukkanlah bahwa**

$$\cos t \leq \frac{t}{\sin t} \leq 2 - \cos t$$

**dan dapatkan pembuktian lainnya bahwa $\lim_{t \to 0} (\sin t)/t = 1$.**



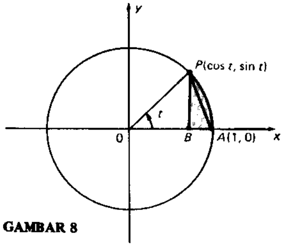

**GAMBAR 7**

**29. Pada Gambar 8, diketahui $D$ adalah luas segitiga $ABP$ dan $E$ adalah luas daerah yang menaunginya.**

**(a) Taksirlah nilai dari $\lim_{t \to 0^+} (D/E)$ dengan memperhatikan gambarnya.**

**(b) Tentukan suatu rumus untuk $D/E$ sebagai fungsi $t$.**

**C (c) Gunakan kalkulator untuk mendapatkan taksiran yang akurat dari $\lim_{t \to 0^+} (D/E)$.**

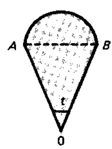



**GAMBAR 8**

*Catatan:* Jawaban yang pasti pada (c) akan ditemukan pada Soal 27 dari Pasal 9.1.

**30. Sebuah segitiga samakaki ditutup oleh setengah lingkaran sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 9. Apabila $D$ adalah luas segitiga $AOB$ dan $E$ adalah luas daerah yang melingkupnya. Tentukan rumus untuk $D/E$ sebagai fungsi $t$ dan kemudian hitunglah**

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{D}{E}$$




**GAMBAR 9**

## 3.5 Aturan Rantai

Bayangkan usaha untuk mencari turunan dari

$$F(x) = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

Pertama anda harus mengalikan bersama ke 60 faktor-faktor kuadrat $2x^2 - 4x + 1$ dan kemudian mendiferensialkan polinom derajat 120 yang dihasilkan.

Untung saja terdapat cara yang lebih baik. Setelah anda mempelajari aturan rantai, anda akan mampu menuliskan jawaban.

$$F'(x) = 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4)$$

secepat anda menggerakkan pensil anda. Sebenarnya aturan rantai demikian pentingnya sehingga anda jarang lagi mendiferensialkan suatu fungsi tanpa memakainya. Tetapi agar dapat menyatakan aturan tersebut sebagaimana mestinya, kita perlu memperkenalkan suatu terobosan pada notasi $D$ kita.

**NOTASI $D_x$** Jika suatu masalah menyangkut lebih dari satu variabel, akan sangat membantu untuk mempunyai sarana penulisan (notasi) untuk menunjukkan variabel mana yang sedang ditinjau pada suatu saat tertentu. Jadi, jika $y = \sin s^2x^3$ dan kita ingin memperlakukan $x$ sebagai variabel bebas dan $s$ sebagai konstan, maka dengan menulis $D_xy$ akan memperoleh

$$D_xy = D_x(s^2x^3) = s^2D_x(x^3) = s^2 \cdot 3x^2$$

Lambang $D_xy$ ini dapat dibaca sebagai *turunan y terhadap x*.

Lebih penting adalah contoh berikut. Andaikan $y = u^{60}$ dan $u = 2x^2 - 4x + 1$. Maka $D_uy = 60u^{59}$ dan $D_xu = 4x - 4$. Tetapi perhatikan bahwa bilamana kita menggantikan $u = 2x^2 - 4x + 1$ dalam $y = u^{60}$, kita peroleh

$$y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$$

dengan demikian, adalah beralasan untuk menanyakan apa dan bagaimana $D_xy$ ini dikaitkan terhadap $D_uy$ dan $D_xu$? Secara lebih umum, bagaimana anda mendiferensialkan suatu fungsi komposit?

**PENDIFERENSIALAN FUNGSI KOMPOSIT** Jika Tina dapat mengetik dua kali lebih cepat daripada Mona dan Mona dapat mengetik tiga kali lebih cepat daripada Dono maka Tina dapat mengetik 2.3 = 6 kali lebih cepat daripada Dono. Kedua laju tersebut dikalikan.

Andaikan bahwa

$$y = f(u) \text{ dan } u = g(x)$$

menentukan fungsi komposit $y = f(g(x))$. Karena suatu turunan menunjukkan laju perubahan, kita dapat mengatakan bahwa

$$y \text{ berubah } D_uy \text{ kali secepat } u$$

$$u \text{ berubah } D_xu \text{ kali secepat } x$$

Kelihatannya beralasan untuk menyimpulkan bahwa

$$y \text{ berubah } D_uy \cdot D_xu \text{ kali secepat } x$$

ini memang benar dan kita akan memberikan bukti formal dalam pasal berikutnya. Hasilnya disebut **Aturan Rantai.**

***Teorema A***

**(Aturan Rantai).** Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposit $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. Jika $g$ terdiferensialkan di $x$ dan $f$ terdiferensialkan di $u = g(x)$, maka $f \circ g$ terdiferensialkan di $x$ dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

**Yakni,**

$$D_x y = D_u y \, D_x u$$

Mungkin akan menolong anda untuk mengingatnya begini.

| variabel kiri | variabel tengah | variabel kanan |
|---|---|---|

$$y = f(u) \quad \text{dan} \quad u = g(x)$$

$$\begin{pmatrix}\text{turunan}\\ \text{variabel}\\ \text{kiri}\\ \text{terhadap}\\ \text{variabel}\\ \text{kanan}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{turunan}\\ \text{variabel}\\ \text{kiri}\\ \text{terhadap}\\ \text{variabel}\\ \text{tengah}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\text{turunan}\\ \text{variabel}\\ \text{tengah}\\ \text{terhadap}\\ \text{variabel}\\ \text{kanan}\end{pmatrix}$$

$$D_x y \quad = \quad D_u y \quad \cdot \quad D_x u$$

Dengan cara seperti ini, anda tidak akan mengalami kesukaran memahaminya bahwa jika

$$w = f(s) \quad \text{dan} \quad s = g(t)$$

maka

$$D_t w = D_s w \, D_t s$$

**PENERAPAN ATURAN RANTAI** Kita mulai dengan contoh $(2x^2 - 4x + 1)^{60}$ yang diperkenalkan pada permulaan pasal ini.

**CONTOH 1** Jika $y = (2x^2 - 4x + 1)^{60}$, cari $D_x y$.

***Penyelesaian*** Kita pikirkan ini sebagai

$$y = u^{60} \quad \text{dan} \quad u = 2x^2 - 4x + 1$$

Jadi,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \cdot D_x u \\ &= (60u^{59})(4x - 4) \\ &= 60(2x^2 - 4x + 1)^{59}(4x - 4) \end{aligned}$$

■

**CONTOH 2** Jika $y = 1/(2x^5 - 7)^3$, cari $D_x y$.

***Penyelesaian*** Pikirkan begini

$$y = \frac{1}{u^3} = u^{-3} \quad \text{dan} \quad u = 2x^5 - 7$$

Jadi,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \cdot D_x u \\ &= (-3u^{-4})(10x^4) \\ &= \frac{-3}{u^4} \cdot 10x^4 \\ &= \frac{-30x^4}{(2x^5 - 7)^4} \end{aligned}$$

■

**CONTOH 3** Jika $y = \sin(x^3 - 3x)$, cari $D_x y$.

***Penyelesaian***

$$y = \sin u \quad \text{dan} \quad u = x^3 - 3x$$

Jadi,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \cdot D_x u \\ &= (\cos u) \cdot (3x^2 - 3) \\ &= [\cos(x^3 - 3x)] \cdot (3x^2 - 3) \end{aligned}$$

■

**CONTOH 4** Cari $D_t\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{13}$.

***Peyelesaian*** Pikirkan secara ini dalam mencari $D_t y$, di mana

$$y = u^{13} \quad \text{dan} \quad u = \frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}$$

Maka,

$$\begin{aligned} D_t y &= D_u y \cdot D_t u \\ &= 13u^{12} \frac{(t^4 + 3)(3t^2 - 2) - (t^3 - 2t + 1)(4t^3)}{(t^4 + 3)^2} \\ &= 13\left(\frac{t^3 - 2t + 1}{t^4 + 3}\right)^{12} \cdot \frac{-t^6 + 6t^4 - 4t^3 + 9t^2 - 6}{(t^4 + 3)^2} \end{aligned}$$

■

Segera anda akan mempelajari untuk membuat pengenalan dalam hati tentang variabel antara tanpa menuliskannya. Jadi, seorang ***pakar*** segera menuliskan:

$$D_x(\cos 3x) = (-\sin 3x) \cdot 3 = -3 \sin 3x$$

$$D_x(x^3 + \sin x)^6 = 6(x^3 + \sin x)^5(3x^2 + \cos x)$$

$$\begin{aligned} D_t\left(\frac{t}{\cos 3t}\right)^4 &= 4\left(\frac{t}{\cos 3t}\right)^3 \frac{\cos 3t - t(-\sin 3t)3}{\cos^2 3t} \\ &= \frac{4t^3(\cos 3t + 3t \sin 3t)}{\cos^5 3t} \end{aligned}$$

**ATURAN RANTAI BERSUSUN** Andaikan

$$y = f(u) \quad \text{dan} \quad u = g(v) \quad \text{dan} \quad v = h(x)$$

Maka

$$D_x y = D_u y \, D_v u \, D_x v$$

**CONTOH 5** Cari $D_x[\sin^3(4x)]$.

***Penyelesaian*** Pikirkan ini untuk mencari $D_x y$, di mana

$$y = u^3 \quad \text{dan} \quad u = \sin v \quad \text{dan} \quad v = 4x$$

Maka,

$$\begin{aligned} D_x y &= D_u y \cdot D_v u \cdot D_x v \\ &= 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 \\ &= 3\sin^2(4x) \cdot \cos(4x) \cdot 4 \\ &= 12\sin^2(4x)\cos(4x) \end{aligned}$$

■

Di sini juga, anda akan segera melakukan penggantian ini dalam kepala dan menuliskan jawabnya dengan segera. Mungkin membantu jika anda perhatikan bahwa, dalam pendiferensialan fungsi komposit bersusun, anda bekerja mulai tanda kurung paling luar ke arah dalam, seperti mengupas bawang.

Marilah kita kerjakan Contoh 5 sekali lagi, dengan membuat gamblang apa yang baru kita katakan

$$\begin{aligned} D_x[\sin(4x)]^3 &= 3\sin^2(4x) D_x \sin(4x) \\ &= 3\sin^2(4x)\cos(4x) D_x(4x) \\ &= 3\sin^2(4x)\cos(4x) \cdot 4 \\ &= 12\sin^2(4x)\cos(4x) \end{aligned}$$

**CONTOH 6** Cari $D_x\{\sin[\cos(x^2)]\}$.

***Penyelesaian***

$$D_x\{\sin[\cos(x^2)]\} = \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\sin(x^2)] \cdot 2x$$

■

## SOAL-SOAL 3.5

Dalam Soal-soal 1-26, cari $D_x y$

1. $y = (2 - 9x)^{15}$
2. $y = (4x + 7)^{23}$
3. $y = (5x^2 + 2x - 8)^5$
4. $y = (3x^3 - 11x)^7$
5. $y = (x^3 - 3x^2 + 11x)^9$
6. $y = (2x^4 - 12x^2 + 11x - 9)^{10}$
7. $y = (3x^4 + x - 8)^{-3}$

8. $y = (4x^3 - 3x^2 + 11x - 1)^{-5}$

9. $y = \dfrac{1}{(3x^4 + x - 8)^9}$

10. $y = \dfrac{3}{(4x^3 + 11x)^7}$

11. $y = \sin(3x^2 + 11x)$

12. $y = \cos(4x^5 - 11x)$

13. $y = \sin^3 x$

14. $y = \cos^5 x$

15. $y = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 4}\right)^4$

16. $y = \left(\dfrac{3x - 1}{2x + 5}\right)^6$

17. $y = \sin\left(\dfrac{3x - 1}{2x + 5}\right)$

18. $y = \cos\left(\dfrac{x^2 - 1}{x + 4}\right)$

19. $y = (4x - 7)^2(2x + 3)$

20. $y = (5x + 6)^2(x - 13)^3$

21. $y = (2x - 1)^3(x^2 - 3)^2$

22. $y = (3x^2 + 5)^2(x^3 - 11)^4$

23. $y = \dfrac{(x + 1)^2}{3x - 4}$

24. $y = \dfrac{2x - 3}{(x^2 + 4)^2}$

25. $y = \dfrac{(3x^2 + 2)^2}{2x^2 - 5}$

26. $y = \dfrac{(x^2 - 1)^3}{(4x^3 - 5)^2}$

Dalam Soal-soal 27-34, cari turunan yang ditunjukkan.

27. $D_t\left(\dfrac{3t - 2}{t + 5}\right)^3$

28. $D_s\left(\dfrac{s^2 - 9}{s + 4}\right)$

29. $D_t\left(\dfrac{(3t - 2)^3}{t + 5}\right)$

30. $D_s\left(\dfrac{s^2 - 9}{s + 4}\right)^3$

31. $D_\theta(\sin^3 \theta)$

32. $D_\theta(\cos^4 \theta)$

33. $D_x\left(\dfrac{\sin x}{\cos 2x}\right)^3$

34. $D_t[\sin t \tan(t^2 + 1)]$

Dalam Soal-soal 35-38, hitung turunan yang ditunjukkan.

35. $f'(3)$ Jika $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^3$

36. $G'(1)$ Jika $G(t) = (t^2 + 9)^3(t^2 - 2)^4$

C 37. $F'(1)$ Jika $F(t) = \sin(t^2 + 3t + 1)$

38. $g'(\frac{1}{2})$ Jika $g(s) = \cos \pi s \sin^2 \pi s$

Dalam Soal-soal 39-46, gunakan Aturan Rantai Bersusun (Contoh 5) untuk mencari turunan yang ditunjukkan.

39. $D_x[\sin^4(x^2 + 3x)]$

40. $D_t[\cos^5(4t - 19)]$

41. $D_t[\sin^3(\cos t)]$

42. $D_u\left[\cos^4\left(\dfrac{u + 1}{u - 1}\right)\right]$

43. $D_\theta[\cos^4(\sin \theta^2)]$

44. $D_x[x \sin^2(2x)]$

45. $D_x\{\sin[\cos(\sin 2x)]\}$

46. $D_t\{\cos^2[\cos(\cos t)]\}$

47. Cari persamaan garis singgung pada $y = (x^2 + 1)^3(x^4 + 1)^2$ di titik $(1, 32)$.

48. Sebuah titik $P$ bergerak di bidang sehingga koordinatnya setelah $t$ detik adalah $(4 \cos 2t, 7 \sin 2t)$, diukur dalam kaki.

(a) Perlihatkan bahwa $P$ mengikuti jalur berbentuk elips. *Petunjuk* : Tunjukkan $(x/4)^2 + (y/7)^2 = 1$, yang merupakan persamaan sebuah elips.

(b) Dapatkan ekspresi untuk $L$, jarak dari titik asal pada saat $t$.

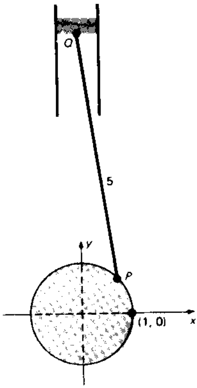
(c) Seberapa cepat $P$ bergerak menjauhi titik asal pada $t = \pi/8$? Anda akan memerlukan kenyataan bahwa $D_u(\sqrt{u}) = 1/(2\sqrt{u})$ (lihat Contoh 4 dari Pasal 3.2).

**49.** Sebuah bola berpusat di titik asal dan berjari-jari 10 sentimeter berputar berlawanan arah perputaran jarum jam pada laju 4 putaran/detik. Sebuah titik $P$ pada pelek berada di (10, 0) pada $t = 0$.

(a) Berapa koordinat $P$ pada saat $t$ detik?

(b) Pada laju berapa $P$ naik (atau turun) pada saat $t = 1$?

**50.** Perhatikan alat roda-piston dalam Gambar 1. Roda mempunyai jari-jari 1 kaki dan berputar berlawanan arah perputaran jarum jam pada 2 radian/detik. Batang penghubung panjangnya 5 kaki. Titik $P$ berada di (1, 0) pada saat $t = 0$.




GAMBAR 1.

(a) Cari koordinat $P$ pada saat $t$.

(b) Cari koordinat-$y$ dari $Q$ pada saat $t$ (koordinat-$x$ selalu nol).

(c) Cari kecepatan $Q$ pada saat $t$. Anda akan memerlukan kenyataan bahwa $D_u(\sqrt{u}) = 1/(2\sqrt{u})$.

**51.** Kerjakan Soal 50 dengan menganggap roda berputar pada 60 putaran/menit.

**52.** Buktikan bahwa $D_x|x| = |x|/x$, $x \neq 0$. *Petunjuk:* Tulis $|x| = \sqrt{x^2}$ dan gunakan Aturan Rantai dengan $u = x^2$.

**53.** Terapkan hasil dalam Soal 52 untuk mencari masing-masing turunan

(a) $D_x|x^2 - 1|$

(b) $D_x|\sin x|$

**54.** Nanti dalam buku ini (Pasal 7), kita akan pelajari suatu fungsi $L$ yang memenuhi $L'(x) = 1/x$. Selesaikanlah setiap turunan berikut:

(a) $D_x L\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

(b) $D_x L(\cos^4 x)$

**55.** Pada setiap soal berikut, tentukan $f'(x)$ dan tuliskan jawabannya dalam bentuk sesederhana mungkin sebagai fungsi $\sin 2x$.

(a) $f(x) = -\cos 2x + \frac{1}{3}\cos^3 2x$

(b) $f(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{32}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin^3 2x \cos 2x$

**56.** Tunjukkan bahwa apabila suatu suku banyak $p(x)$ dapat dibagi dengan $(ax + b)^2$, maka $p'(x)$ dapat dibagi dengan $ax + b$.

**57.** Diketahui $f(0) = 0$ dan $f'(0) = 2$. Tentukanlah turunan dari $f(f(f(f(x))))$ pada $x = 0$.

**58.** Gunakanlah Aturan Rantai untuk menunjukkan bahwa turunan suatu fungsi ganjil adalah genap dan turunan fungsi genap adalah ganjil.

## 3.6 Notasi Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz adalah salah seorang dari dua penemu utama kalkulus (yang lainnya adalah Isaac Newton). Cara penulisannya (notasinya) untuk turunan masih dipakai secara luas, khususnya dalam bidang terapan seperti halnya fisika, kimia, dan ekonomi. Daya tariknya terletak dalam bentuknya, sebuah bentuk yang sering mengemukakan hasil-hasil yang benar dan kadang-kadang menunjukkan bagaimana membuktikannya. Setelah kita menguasai notasi Leibniz, kita akan menggunakannya untuk menyatakan kembali Aturan Rantai dan kemudian benar-benar membuktikan aturan tersebut.

PERTAMBAHAN Jika nilai sebuah variabel $x$ berganti dari $x_1$ ke $x_2$ maka $x_2 - x_1$, perubahan dalam $x$, disebut suatu **pertambahan** dari $x$ dan biasanya dinyatakan oleh $\Delta x$ (dibaca "delta $x$"). Perhatikan segera bahwa $\Delta x$ *tidak* berarti $\Delta$ kali $x$. Jika $x_1 = 4,1$ dan $x_2 = 5,7$ maka,

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5{,}7 - 4{,}1 = 1{,}6$$

Jika $x_1 = c$ dan $x_2 = c + h$, maka

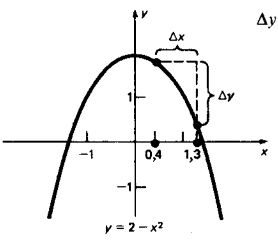
$$\Delta x = x_2 - x_1 = c + h - c = h$$

Berikutnya andaikan bahwa $y = f(x)$ menentukan sebuah fungsi. Jika $x$ berubah dari $x_1$ ke $x_2$, maka $y_1$ berubah dari $y_1 = f(x_1)$ ke $y_2 = f(x_2)$. Jadi, bersesuaian dengan pertambahan $\Delta x = x_2 - x_1$ dalam $x$, terdapat pertambahan dalam $y$ yang diberikan oleh

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

**CONTOH 1** Andaikan $y = f(x) = 2 - x^2$. Cari $\Delta y$ bilamana $x$ berubah dari 0,4 ke 1,3 (lihat Gambar 1).

*Penyelesaian*




GAMBAR 1

$$\Delta y = f(1{,}3) - f(0{,}4) = [2 - (1{,}3)^2] - [2 - (0{,}4)^2]$$
$$= 0{,}31 - 1{,}84 = -1{,}53 \qquad \blacksquare$$

LAMBANG $dy/dx$ UNTUK TURUNAN Sekarang andaikan bahwa variabel bebas beralih dari $x$ ke $x + \Delta x$. Perubahan yang bersesuaian dalam variabel tak bebas $y$, akan berupa

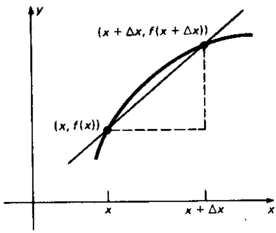
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

dan perbandingan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

menggambarkan kemiringan talibusur yang melalui $(x, f(x))$, seperti diperlihatkan dalam Gambar 2. Jika $\Delta x \to 0$, kemiringan talibusur ini mendekati kemiringan garis singgung, dan untuk kemiringan yang belakangan ini Leibniz menggunakan lambang $dy/dx$. Sehingga,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)}$$




GAMBAR 2

Leibniz menyebut $dy/dx$ suatu hasilbagi dari dua bilangan yang sangat kecil. Arti perkataan *sangat kecil* tidak jelas, dan kita tidak akan memakainya. Tetapi, $dy/dx$ merupakan lambang baku untuk turunan; kita akan sering memakainya sejak saat ini. Untuk sekarang, pikirkan $dy/dx$ sebagai lambang operator dengan pengertian yang sama seperti $D_x$, dan membacanya "turunan terhadap $x$".

**CONTOH 2** Cari $dy/dx$ jika $y = x^3 - 3x^2 + 7x$.

***Penyelesaian***

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 7x)\\ &= \frac{d(x^3)}{dx} - 3\frac{d(x^2)}{dx} + 7\frac{d(x)}{dx}\\ &= 3x^2 - 3(2x) + 7(1)\\ &= 3x^2 - 6x + 7\end{aligned}$$

■

**CONTOH 3** Cari $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{3t}{t^2 + 1}\right)$.

***Penyelesaian*** Menurut Aturan Hasilbagi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3t}{t^2 + 1}\right) = \frac{(t^2 + 1)(3) - (3t)(2t)}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-3t^2 + 3}{(t^2 + 1)^2}$$

■

**ATURAN RANTAI LAGI** Andaikan bahwa $y = f(u)$ dan $u = g(x)$. Dalam notasi Leibniz, Aturan Rantai mengambil bentuk yang sangat anggun

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}}$$

Bentuk ini dikatakan anggun karena mudah untuk diingat. Cukup mencoret $du$ di ruas kanan dan anda mempunyai ruas kiri. Jangan mencoba untuk memahami alasan matematis dari pencoretan ini, tetapi gunakan sebagai bantuan ingatan jika memang menolong.

**CONTOH 4** Cari $dy/dx$ jika $y = (x^3 - 2x)^{12}$

***Penyelesaian*** Pikirkan $x^3 - 2x$ sebagai $u$. Maka $y = u^{12}$ dan

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\\ &= (12u^{11})(3x^2 - 2)\\ &= 12(x^3 - 2x)^{11}(3x^2 - 2)\end{aligned}$$ ■

Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$, maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

**CONTOH 5** Cari $dy/dx$ jika $y = \cos^3(x^2 + 1)$.

***Penyelesaian*** Kita dapat memikirkan ini sebagai $y = u^3$, $u = \cos v$, dan $v = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}\\ &= (3u^2)(-\sin v)(2x)\\ &= (3\cos^2 v)[-\sin(x^2 + 1)](2x)\\ &= -6x\cos^2(x^2 + 1)\sin(x^2 + 1)\end{aligned}$$ ■

## BUKTI SEBAGIAN DARI ATURAN RANTAI

***Bukti*** Kita andaikan bahwa $y = f(u)$ dan $u = g(x)$, bahwa $g$ terdiferensialkan di $x$, dan bahwa $f$ terdiferensialkan di $u = g(x)$. Bilamana $x$ menerima suatu pertambahan $\Delta x$, maka pertambahan yang bersesuaian dalam $u$ dan $y$ akan diberikan oleh

$$\begin{aligned}\Delta u &= g(x + \Delta x) - g(x)\\ \Delta y &= f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))\\ &= f(u + \Delta u) - f(u)\end{aligned}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Karena $g$ terdiferensialkan di $x$, maka ia kontinu di sana (Teorema 3.2A), sehingga $\Delta x \to 0$ memaksa $\Delta u \to 0$. Karenanya

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Bukti ini sangat cerdik, tetapi sayangnya mengandung suatu cacat halus. Dengan adanya fungsi $u = g(x)$ yang bersifat bahwa $\Delta u = 0$ untuk beberapa titik di setiap lingkungan $x$ (fungsi konstanta $g(x) = k$ adalah sebuah contoh yang baik). Ini berarti pembagian oleh $\Delta u$ pada langkah pertama mungkin tidak berlaku. Namun, tidak ada cara yang mudah untuk mengatasi kesulitan ini, meskipun Aturan Rantai tetap sahih dalam kasus itu. Kami akan menyajikan bukti lengkap dari Aturan Rantai tersebut dalam Apendiks (Pasal A.1. Teorema B). ■

## SOAL-SOAL 3.6

Dalam Soal-soal 1-4, cari $\Delta y$ untuk nilai-nilai $x_1$ dan $x_2$ yang diberikan (lihat Contoh 1).

1. $y = x^2 - 2x + 4,\ x_1 = 1,\ x_2 = 1{,}5$
2. $y = 2x + \frac{1}{x},\ x_1 = 2,\ x_2 = 2{,}2$
3. [C] $y = \frac{3}{x+1},\ x_1 = 2{,}34.\ x_2 = 2{,}31$
4. [C] $y = \cos 2x,\ x_1 = 0{,}571,\ x_2 = 0{,}573$

Dalam Soal-soal 5-8, mula-mula cari dan sederhanakan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Kemudian cari $dy/dx$ dengan mengambil limit dari jawab anda untuk $\Delta x \to 0$.

5. $y = x^2 - 3x$
6. $y = x^3$
7. $y = \frac{x}{x+1}$
8. $y = \frac{x^2+1}{x}$

Dalam Soal-soal 9-20, gunakan Aturan Rantai untuk mencari $dy/dx$.

9. $y = u^3$ dan $u = x^2 + 3x$
10. $y = \frac{1}{u^2} = u^{-2}$ dan $u = \sin x$
11. $y = \sin(x^2)$
12. $y = \sin^2 x$
13. $y = \left(\frac{x^2+1}{\cos x}\right)^4$
14. $y = [(x^2 + 1)\sin x]^3$
15. $y = \cos(x^2)\sin^2 x$
16. $y = \frac{(x^3 + 2x)^4}{x^4 + 1}$
17. $y = \sin^4(x^2 + 3)$ (Lihat Contoh 5)
18. $y = \sin[(x^2 + 3)^4]$

**19.** $y = \cos^2\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)$

**20.** $y = \sin^2[\cos^2(x^2)]$

Dalam Soal-soal 21-26, cari turunan yang ditunjuk.

**21.** $\dfrac{d}{dt}(\sin^3 t + \cos^3 t)$

**22.** $\dfrac{d}{ds}[(s^2+3)^3 - (s^2+3)^{-3}]$

**23.** $D_r[\pi(r+3)^2 - 3\pi r(r+2)^2]$

**24.** $D_t[u^3 + 3u]$ Jika $u = t^2$

**25.** $f'(2)$ Jika $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^4$

**26.** $F'(0)$ Jika $F(t) = \cos(t^2)\sin 3t$

27. Andaikan bahwa $f(3) = 2$, $f'(3) = -1$, $g(3) = 3$, dan $g'(3) = -4$. Hitung masing-masing nilai.

(a) $(f+g)'(3)$ (b) $(f \cdot g)'(3)$
(c) $(f/g)'(3)$ (d) $(f \circ g)'(3)$

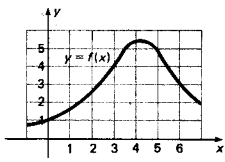
28. Jika $f(2) = 4$, $f'(4) = 6$, dan $f'(2) = -2$, hitung masing-masing nilai.

(a) $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^3$ di $x = 2$

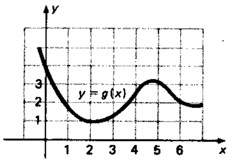
(b) $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{3}{f(x)}\right]$ di $x = 2$

(c) $(f \circ f)'(2)$

Soal-soal 29 dan 30 mengacu ke grafik-grafik pada Gambar 3 dan 4.




**GAMBAR 3**




**GAMBAR 4**

29. Cari masing-masing nilai secara hampiran.

(a) $(f+g)'(4)$

(b) $(f \circ g)'(6)$

30. Cari masing-masing nilai secara hampiran.

(a) $(f/g)'(2)$

(b) $(g \circ f)'(3)$

31. Sisi sebuah kubus bertambah dengan laju tetap sebesar 16 sentimeter/menit.
(a) Cari laju pada mana volume kubus bertambah pada saat sisi sebesar 20 cm.
(b) Cari laju pada mana total luas permukaan kubus bertambah di saat sisi sebesar 15 sentimeter.

32. Kapal $A$ dan $B$ bertolak dari titik asal pada waktu yang bersamaan. Kapal $A$ berlayar ke arah timur dengan laju 20 mil/jam dan kapal $B$ berlayar ke arah utara dengan laju 12 mil/jam. Seberapa cepat mereka berpisah setelah 3 jam? Setelah 6 jam?

33. Di manakah garis singgung kurva $y = x^2 \cos^2(x)^2$ pada $x = \sqrt{\pi}$ akan memotong sumbu-$x$?

34. Permukaan dari suatu jam dinding berjari-jari 10 cm. Seutas tali elastis diikatkan salah satu ujungnya pada tepi angka 12 dan ujung lainnya diikatkan pada ujung jarum menit yang panjangnya 10 cm. Tentukanlah tingkat ketegangan tali pada waktu pukul 12.15 (dengan

asumsi bahwa penunjukan waktu tidak menjadi lambat dengan menegangnya tali).

**35.** Diketahui $f$ dapat dideferensialkan dan ada beberapa titik $x_1$ dan $x_2$ sedemikian rupa sehingga $f(x_1) = x_2$ dan $f(x_2) = x_1$. Diketahui $f(f(f(f(x))))$. Buktikan $g'(x_1) = g'(x_2)$.

**36.** Diketahui

$$\text{Let } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{jika } x \neq 0 \\ 0 & \text{jika } x = 0 \end{cases}$$

(a) Tentukan $f'(x)$ untuk $x \neq 0$ dengan dalil yang ada.
(b) Tentukan $f'(0)$ dari definisi turunan.
(c) Tunjukkan bahwa $f'(x)$ tak-kontinu pada $x = 0$.

## 3.7 Turunan Tingkat Tinggi

Operasi pendiferensialan mengambil sebuah fungsi $f$ dan menghasilkan sebuah fungsi baru $f'$. Jika $f'$ sekarang kita diferensialkan, kita masih menghasilkan fungsi lain, dinyatakan oleh $f''$ (dibaca "$f$ dua aksen") dan disebut **turunan kedua** dari $f$. Pada gilirannya ia boleh diturunkan lagi, dengan demikian menghasilkan $f'''$, yang disebut **turunan ketiga**, dan seterusnya. Sebagai contoh, andaikan

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 8$$

Maka

$$f'(x) = 6x^2 - 8x + 7$$

$$f''(x) = 12x - 8$$

$$f'''(x) = 12$$

$$f''''(x) = 0$$

Karena turunan dari fungsi nol adalah nol, maka semua turunan tingkat yang lebih tinggi akan nol.

Kita telah memperkenalkan tiga notasi untuk turunan (sekarang disebut juga *turunan pertama*) dari $y = f(x)$. Mereka adalah

$$f'(x) \qquad D_x y \qquad \frac{dy}{dx}$$

masing-masing disebut, *notasi aksen*, *notasi d*, dan *notasi Leibniz*. Terdapat sebuah variasi dari cara notasi aksen – yakni, $y'$ – yang kadang kala akan kita pakai juga. Semua notasi ini mempunyai perluasan untuk turunan tingkat tinggi, seperti diperlihatkan dalam bagan pada halaman berikutnya. Khususnya perhatikan notasi Leibniz, yang walaupun ruwet – kelihatannya paling cocok untuk Leibniz. Yang, menurutnya, lebih wajar dari pada menuliskan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad \text{sebagai} \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Cara penulisan (notasi) untuk turunan dari $y = f(x)$

| *Turunan* | *notasi* $f'$ | *notasi* $y'$ | *notasi* $D$ | *notasi Leibniz* |
|---|---|---|---|---|
| Pertama | $f'(x)$ | $y'$ | $D_x y$ | $\frac{dy}{dx}$ |
| Kedua | $f''(x)$ | $y''$ | $D_x^2 y$ | $\frac{d^2y}{dx^2}$ |
| Ketiga | $f'''(x)$ | $y'''$ | $D_x^3 y$ | $\frac{d^3y}{dx^3}$ |
| Keempat | $f''''(x)$ | $y''''$ | $D_x^4 y$ | $\frac{d^4y}{dx^4}$ |
| Kelima | $f^{(5)}(x)$ | $y^{(5)}$ | $D_x^5 y$ | $\frac{d^5y}{dx^5}$ |
| Keenam | $f^{(6)}(x)$ | $y^{(6)}$ | $D_x^6 y$ | $\frac{d^6y}{dx^6}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| Ke-$n$ | $f^{(n)}(x)$ | $y^{(n)}$ | $D_x^n y$ | $\frac{d^ny}{dx^n}$ |

**CONTOH 1** Jika $y = \sin 2x$, cari $d^3y/dx^3$, $d^4y/dx^4$, dan $d^{12}y/dx^{12}$.

***Penyelesaian***

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2^2 \sin 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2^3 \cos 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \sin 2x$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} = 2^5 \cos 2x$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{12}y}{dx^{12}} = 2^{12} \sin 2x$$

■

**KECEPATAN DAN PERCEPATAN** Dalam Pasal 3.1, kita memakai pengertian kecepatan sesaat untuk memotivasi definisi turunan. Kita akan mengkaji ulang pengertian ini dengan memakai sebuah contoh. Juga, sejak saat ini kita akan memakai kata tunggal *kecepatan* sebagai ganti istilah *kecepatan sesaat* yang lebih tidak praktis.

**CONTOH 2** Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisi $s$-nya memenuhi, $s = 2t^2 - 12t + 8$, dengan $s$ diukur dalam sentimeter dan $t$ dalam detik. Tentukan kecepatan benda bilamana $t = 1$ dan $t = 6$. Kapan kecepatannya 0? Kapan ia positif?

***Penyelesaian*** Jika kita memakai lambang $v(t)$ untuk kecepatan pada saat $t$, maka

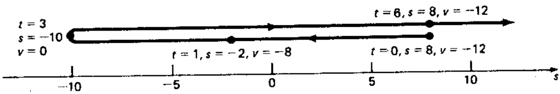
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

Jadi,

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8 \text{ cm/detik}$$

$$v(6) = 4(6) - 12 = 12 \text{ cm/detik}$$

Kecepatan 0 bilamana $4t - 12 = 0$, yaitu, pada saat $t = 3$. Kecepatan positif bilamana $4t - 12 > 0$, atau pada saat $t > 3$. Semua ini diperlihatkan secara skema dalam Gambar 1.




**GAMBAR 1**

Tentu saja, benda tersebut bergerak sepanjang sumbu-$s$, bukan pada jalur di atasnya. Tetapi jalur kita memperlihatkan apa yang terjadi pada benda itu. Jika $t = 0$ dan $t = 3$, kecepatan negatif: benda bergerak ke kiri (mundur). Pada saat $t = 3$ ia "diperlambat" ke kecepatan nol, kemudian mulai bergerak ke kanan bila kecepatannya positif. Jadi, kecepatan negatif bersesuaian dengan gerakan benda itu ke arah berkurangnya $s$; kecepatan positif bersesuaian dengan gerakan benda itu ke arah bertambahnya $s$. Pembahasan yang mendalam mengenai butir-butir ini akan diberikan dalam Pasal 4.8. ■

Terdapat perbedaan teknis antara perkataan *kecepatan* (velocity) dengan *laju* (speed). Kecepatan (velocity) mempunyai sebuah tanda yang dihubungkan dengannya; mungkin positif atau negatif. Laju didefinisikan sebagai nilai mutlak kecepatan. Jadi, dalam contoh di atas, laju pada saat $t = 1$ adalah $|-8| = 8$ cm/detik. Pengukur dalam kebanyakan kendaraan adalah pengukur laju (speedometer); ia selalu memberikan nilai-nilai tak negatif.

Sekarang kita ingin memberikan tafsiran fisik mengenai turunan kedua $d^2s/dt^2$. Tentu saja, ini hanya turunan pertama dari kecepatan. Jadi, ia mengukur laju perubahan kecepatan terhadap waktu, yang dinamakan **percepatan**. Jika dinyatakan oleh $a$, maka

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$$

Dalam Contoh 2, $s = 2t^2 - 12t + 8$. Jadi,

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$$

Ini berarti bahwa kecepatan bertambah dengan suatu tingkat yang tetap sebesar 4 cm/detik setiap detik, yang kita tuliskan sebagai 4 cm/detik/detik.

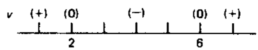
**CONTOH 3** Sebuah titik bergerak sepanjang garis koordinat mendatar sedemikian sehingga posisinya pada saat $t$ dinyatakan oleh

$$s = t^3 - 12t^2 + 36t - 30$$

Di sini $s$ diukur dalam meter dan $t$ dalam detik.
(a) Kapan kecepatan 0?
(b) Kapan kecepatan positif?
(c) Kapan titik bergerak mundur (yaitu, ke kiri).
(d) Kapan percepatannya positif?

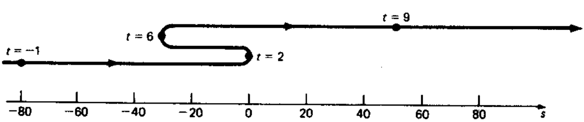
***Penyelesaian***

(a) $v = ds/dt = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t - 2)(t - 6)$. Jadi $v = 0$ pada $t = 2$ dan $t = 6$.
(b) $v > 0$ bilamana $(t - 2)(t - 6) > 0$. Kita pelajari bagaimana memecahkan persamaan kuadrat dalam Pasal 1.3. Penyelesaiannya adalah $\{t : t < 2 \text{ atau } t > 6\}$ atau dalam notasi selang, $(-\infty, 2) \cup (6, \infty)$: lihat Gambar 2.




**GAMBAR 2**

(c) Titik bergerak ke kiri bilamana $v < 0$ – yaitu, bilamana $(t - 2)(t - 6) < 0$. Ketaksamaan ini mempunyai penyelesaian berupa selang $(2, 6)$.
(d) $a = dv/dt = 6t - 24 = 6(t - 4)$. Jadi $a > 0$ bilamana $t > 4$. Gerakan titik secara skematis diperlihatkan dalam Gambar 3.

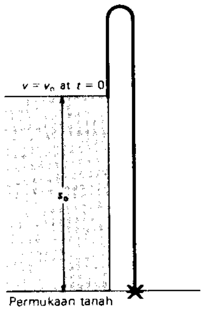



**GAMBAR 3** ■

**MASALAH BENDA JATUH** Jika sebuah benda dilempar ke atas (atau ke bawah) dari suatu ketinggian awal $s_0$ meter dengan kecepatan awal $v_0$ meter/detik dan jika $s$ adalah tingginya di atas tanah dalam meter setelah $t$ detik, maka

$$s = -16t^2 + v_0 t + s_0$$

Ini menganggap bahwa percobaan berlangsung dekat permukaan laut dan bahwa tahanan udara dapat diabaikan. Diagram dalam Gambar 4 melukiskan situasi yang kita bayangkan.




**GAMBAR 4**

**CONTOH 4** Andaikan sebuah bola dilempar ke atas dari puncak sebuah gedung yang tingginya 160 kaki dengan kecepatan awal 64 kaki/detik.

(a) Kapan ia mencapai ketinggian maksimum?
(b) Berapa ketinggian maksimumnya?
(c) Kapan ia membentur tanah?
(d) Dengan laju berapa ia membentur tanah?
(e) Berapa percepatannya pada $t = 2$?

***Penyelesaian*** Di sini $s_0 = 160$ dan $v_0 = 64$, sehingga

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

(a) Bola mencapai ketinggian maksimum pada waktu kecepatannya 0 – yakni, pada waktu $-32t + 64 = 0$, atau pada waktu $t = 2$ detik.

(b) Pada $t = 2$, $s = -16(2)^2 = 64(2) + 160 = 224$ kaki.

(c) Bola membentur tanah pada waktu $s = 0$ – yakni, pada waktu

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Jika kita bagi dengan $-16$ dan gunakan rumus *abc*, kita peroleh

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Hanya jawab positif yang berarti. Jadi, bola membentur tanah pada $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5{,}74$ detik.

(d) Pada $t = 2 + \sqrt{14}$, $v = -32(2 + \sqrt{14}) + 64 \approx -119{,}73$. Jadi, bola membentur tanah pada laju 119,73 kaki/detik.

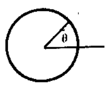
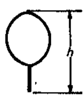
(e) Percepatan selalu $-32$ kaki/detik/detik. Ini adalah percepatan gravitasi dekat permukaan laut. ■

**BUKU TENTANG ALAM**

**"Buku tentang Alam yang akbar telah ada sebelum kita ada dan falsafah yang benar tertulis di situ. . . Akan tetapi, kita tidak dapat membacanya sebelum kita mempelajari bahasa dan lambang-lambang sebagaimana tertulis . . . . Buku itu ditulis dalam bahasa matematika dan lambang-lambangnya berupa segitiga, lingkaran dan gambar-gambar geometris lainnya".**

**Galileo Galilei**

**PEMBENTUKAN MODEL MATEMATIS** Galileo memang benar dalam menyatakan bahwa buku tentang alam ditulis dalam bahasa matematika. Tentu saja, lembaga-lembaga ilmiah telah membuktikan kebenarannya. Pekerjaan mengungkapkan suatu kejadian fisika dan menyajikannya dalam lambang-lambang matematika dinamakan **pembentukan model matematis**. Salah satu unsur pokoknya adalah menerjemahkan uraian-uraian kata ke dalam bahasa matematika. melakukan hal ini, khususnya yang menyangkut tingkat perubahan akan menjadi semakin penting sejalan dengan pembahasan kita. Berikut adalah beberapa gambaran sederhana.

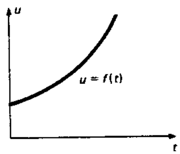
| ***Uraian Kata*** | | ***Model Matematika*** |
|---|---|---|
| Air tiris keluar dari sebuah tangki berbentuk silinder pada suatu tingkat yang sebanding dengan kedalaman airnya. |   | Bila $V$ menyatakan volume air pada saat $t$ maka $\frac{dV}{dt} = -kh$. |
| Suatu roda berputar secara konstan 6 putaran per menit. |   | $\frac{d\theta}{dt} = 6(2\pi)$ |
| Kepadatan (dalam gram per cm) suatu kawat pada suatu titik adalah dua kali jaraknya dari ujung kiri. |   | dt |
| Tinggi suatu pohon bertambah secara kontinu, akan tetapi dengan tingkat yang makin lama makin lambat. |   | Bila $m$ menyatakan massa $x$ cm bagian kiri kawat, maka $\frac{dm}{dx} = 2x$. <br> $\frac{dh}{dt} > 0, \quad \frac{d^2h}{dt^2} < 0$ |

Penggunaan bahasa matematika tidak terbatas hanya untuk besaran-besaran fisika saja; akan tetapi juga sesuai untuk ilmu-ilmu sosial, terutama ekonomi.

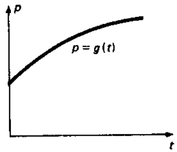
**CONTOH 5** Kantor Berita Antara melaporkan bulan Mei 1980, bahwa pengangguran bertambah dengan tingkat yang semakin tinggi. Di samping itu, harga makanan naik tetapi dengan tingkat yang lebih lambat dari pada sebelumnya. Tafsirkan pernyataan-pernyataan ini dalam bahasa kalkulus.

***Penyelesaian*** Andaikan $u = f(t)$ menyatakan jumlah orang yang menganggur pada waktu $t$. Walaupun $u$ sebenarnya meloncat dalam besaran satuan, kita ikuti kebiasaan baku dalam menyatakan $u$ oleh sebuah kurva mulus manis, seperti dalam Gambar 5. Untuk mengatakan pengangguran bertambah adalah mengatakan $du/dt > 0$; untuk mengatakan bahwa ia bertambah pada tingkat yang semakin tinggi adalah mengatakan $d^2u/dt^2 > 0$.

Serupa, jika $p = g(t)$ mewakili harga makanan (misalnya, biaya khas toko makanan satu hari untuk satu orang) pada waktu $t$, maka $dp/dt > 0$ tetapi $d^2p/dt^2 < 0$; lihat Gambar 6.




GAMBAR 5




GAMBAR 6

■

## SOAL-SOAL 3.7

Dalam Soal-soal 1-8, cari $d^3y/dx^3$.

1. $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 8$
2. $y = 2x^5 - x^4$
3. $y = (2x + 5)^4$
4. $y = (3x - 2)^5$
5. $y = \sin(3x)$
6. $y = \cos(x^2)$
7. $y = \dfrac{1}{x - 3}$
8. $y = \dfrac{x}{2x + 1}$

Dalam Soal-soal 9-16, cari $f''(2)$.

9. $f(x) = 2x^3 - 7$
10. $f(x) = 5x^3 + 1$
11. $f(t) = \dfrac{1}{t}$
12. $f(u) = \dfrac{1}{2u - 5}$
13. $f(x) = x(x^2 + 1)^3$
14. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$
15. $f(x) = \sin^2(\pi x)$
16. $f(x) = x\cos(\pi x)$

17. Andaikan $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$. Jadi $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ dan $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Kita beri $n!$ nama $n$ **faktorial**. Buktikan bahwa $D_x^n(x^n) = n!$

18. Dengan memakai lambang faktorial dari Soal 17, cari sebuah rumus untuk

$$D_x^n(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)$$

19. Tanpa melakukan perhitungan apapun, cari tiap turunan

(a) $D_x^4(3x^3 + 2x - 19)$
(b) $D_x^{12}(100x^{11} - 79x^{10})$
(c) $D_x^{11}(x^2 - 3)^5$

20. Cari sebuah rumus untuk $D_x^n(1/x)$.

21. Jika $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$, cari nilai $f''$ pada setiap titik nol dari $f'$ – yakni, pada setiap titik $c$ di mana $f'(c) = 0$.

22. Andaikan $g(t) = at^2 + bt + c$ dan $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$, dan $g''(1) = -4$. Cari $a$, $b$, dan $c$.

Dalam Soal-soal 23-28, sebuah benda bergerak sepanjang sebuah garis koordinat mendatar sesuai dengan rumus $s = f(t)$, dimana $s$, jarak berarah dari titik asal, adalah dalam kaki dan $t$ dalam detik. Dalam tiap kasus, jawab pertanyaan-pertanyaan berikut (lihat Contoh 2 dan 3).

(a) Berapa $v(t)$ dan $a(t)$, kecepatan dan percepatan pada waktu $t$?
(b) Kapan benda bergerak ke kanan?
(c) Kapan ia bergerak ke kiri?
(d) Kapan percepatan negatif?
(e) Gambarkan sebuah diagram skematis, yang memperlihatkan gerakan benda.

23. $s = 12t - 2t^2$

24. $s = t^3 - 6t^2$

25. $s = t^3 - 9t^2 + 24t$

26. $s = 2t^3 - 6t + 5$

27. $s = t^2 + \dfrac{16}{t}, t > 0$

28. $s = t + \dfrac{4}{t}, t > 0$

29. Jika $s = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2$, cari kecepatan dari benda yang bergerak bilamana percepatannya nol.

30. Jika $s = \frac{1}{10}(t^4 - 14t^3 + 60t^2)$, cari kecepatan dari benda yang bergerak bilamana percepatannya nol.

31. Dua partikel bergerak sepanjang garis koordinat. Pada akhir $t$ detik jarak-jarak berarah mereka dari titik asal, dalam meter, masing-masing diberikan oleh $s_1 = 4t - 3t^2$ dan $s_2 = t^2 - 2t$.
(a) Kapan mereka mempunyai kecepatan sama?
(b) Kapan mereka mempunyai laju sama? (Laju sebuah partikel adalah nilai mutlak kecepatannya).
(c) Kapan mereka mempunyai posisi sama?

32. Posisi dua partikel $P_1$ dan $P_2$, pada sebuah garis koordinat pada akhir $t$ detik masing-masing diberikan oleh $s_1 = 3t^3 - 12t^2 + 18t + 5$ dan $s_2 = -t^3 + 9t^2 - 12t$. Kapan dua partikel itu mempunyai kecepatan sama?

33. Sebuah benda dilempar langsung ke atas pada ketinggian $s = -16t^2 + 48t + 256$ kaki setelah $t$ detik (lihat Contoh 4).

(a) Berapa kecepatan awalnya?
(b) Kapan ia mencapai ketinggian maksimum?
(c) Berapa ketinggian maksimumnya?
C (d) Kapan ia membentur tanah?
C (e) Dengan laju berapa ia membentur tanah?

34. Sebuah benda dilempar langsung ke atas dari permukaan tanah dengan kecepatan awal 48 kaki/detik kira-kira berada pada ketinggian $s = 48t - 16t^2$ kaki pada akhir $t$ detik.
(a) Berapa ketinggian maksimum yang dicapai?
(b) Seberapa cepat ia bergerak, dan ke arah mana, pada akhir 1 detik?
(c) Berapa lama yang diperlukan untuk kembali ke posisi semula?

C 35. Sebuah peluru kendali ditembakkan langsung ke atas dari tanah dengan kecepatan awal $v_0$ kaki/detik. Ketinggiannya setelah $t$ detik diberikan oleh $s = v_0t - 16t^2$ kaki. Berapa seharusnya kecepatan awal peluru kendali itu agar mencapai ketinggian maksimum 1 mil?

36. Sebuah benda dilempar langsung ke bawah dari puncak sebuah karang de-

ngan kecepatan awal $v_0$ kaki/detik kira-kira jatuh sejauh $s = v_0 t + 16t^2$ kaki setelah $t$ detik. Jika ia membentur permukaan laut di bawah setelah 3 detik dengan kecepatan 140 kaki/detik, berapa tinggi karang tersebut?

37. Sebuah titik bergerak sepanjang garis koordinat mendatar sedemikian sehingga posisinya pada saat $t$ dirinci oleh $s = t^3 - 3t^2 - 24t - 6$. Di sini $s$ diukur dalam sentimeter dan $t$ dalam detik. Kapan titik itu bertambah lambat, yakni, kapan lajunya berkurang?

38. Yakinkan diri anda bahwa sebuah titik yang bergerak sepanjang sebuah garis adalah semakin lambat bilamana kecepatan dan percepatannya mempunyai tanda berlawanan (lihat Soal 39).

39. Terjemahkanlah yang berikut ini ke dalam bahasa turunan pertama, kedua, dan ketiga dari jarak terhadap waktu.
(a) Laju mobil tersebut sebanding dengan jarak yang telah ditempuhnya.
(b) Mobil itu bertambah cepat.
(c) Saya tidak mengatakan bahwa mobil itu makin lambat; Saya katakan tingkat pertambahan kecepatannya yang berkurang.
(d) Kecepatan mobil itu bertambah dengan 10 mil per jam setiap menit.
(e) Mobil itu makin lambat secara teratur sampai akhirnya berhenti.
(f) Mobil itu selalu menempuh jarak yang sama dalam interval waktu yang sama.

40. Terjemahkanlah yang berikut ini ke dalam bahasa turunan.
(a) Air menguap dari tangki itu dengan suatu tingkat yang konstan.
(b) Air dituangkan ke dalam tangki itu 3 galon per menit akan tetapi juga ada kebocoran $\frac{1}{2}$ galon per menit.
(c) Oleh karena air yang dituangkan ke dalam tangki kerucut pada tingkat yang konstan, permukaan air meninggi pada tingkat yang makin lama makin lambat.
(d) Inflasi dijaga tetap pada tahun ini akan tetapi diperkirakan akan naik semakin cepat dalam tahun depan.
(e) Pada saat ini harga minyak sedang merosot tajam, akan tetapi kecenderungan ini diperkirakan akan berkurang dan kemudian akan berbalik dalam tempo 2 tahun.
(f) Suhu badan David masih tetap naik, akan tetapi kiranya penicillin akan segera menawarkannya.

41. Terjemahkanlah pernyataan-pernyataan berikut ini ke dalam bahasa matematika seperti pada Contoh 5.

(a) Harga sebuah mobil terus bertambah dalam tingkat yang makin lama makin tinggi.
(b) Dalam 2 tahun terakhir ini, Amerika Serikat melanjutkan pengurangan konsumsi minyaknya, akan tetapi dalam tingkat yang makin lama makin rendah.
(c) Populasi di dunia terus berkembang, akan tetapi dalam tingkat yang makin lama makin rendah.
(d) Mobil itu makin lama makin cepat pada tingkat perubahan yang tetap.
(e) Sudut Menara Miring di Pisa terhadap garis vertikal bertambah lebih cepat.
(f) Keuntungan perusahaan Upper Midwest bertambah dengan lambat.
(g) Perusahaan XYZ telah merugi, akan tetapi dalam waktu dekat nanti situasi ini akan berubah.

42. Terjemahkanlah setiap pernyataan berikut yang berasal dari surat-surat kabar ke dalam bentuk pernyataan turunan. (a) Di Amerika Serikat, rasio $R$ hutang pemerintah terhadap pendapatan nasionalnya tetap tidak berubah di sekitar 28% sampai dengan tahun 1981 akan tetapi, (b) kemudian rasio ini mulai meningkat dan terus meningkat secara tajam, mencapai 36% pada tahun 1983. (c) IMF menerbitkan daftar yang menunjukkan bahwa laju pertumbuhan $R$ lebih besar di Amerika Serikat dari pada di Jepang.

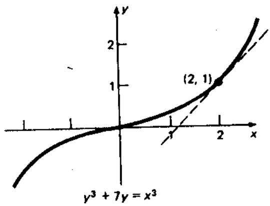
43. Leibniz mendapat suatu rumus umum untuk $D_x^n(uv)$ di mana $u$ dan $v$ adalah sama-sama fungsi $x$. Dapatkah Anda menemukannya? *Petunjuk:* Mulailah dengan mencoba $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

### 3.8 Pendiferensialan Implisit (belum jelas)

Dengan sedikit usaha, kebanyakan mahasiswa akan mampu melihat bahwa grafik dari

$$y^3 + 7y = x^3$$

tampak seperti apa yang diperlihatkan dalam Gambar 1. Pastilah titik (2, 1) terletak pada grafik, dan tampaknya terdapat sebuah garis singgung yang terumuskan dengan baik pada titik tersebut. Bagaimana kita mencari kemiringan garis singgung ini? Mudah, anda dapat menjawab: hitung saja $dy/dx$ pada titik itu. Tetapi itulah kesukarannya, kita tidak tahu bagaimana mencari $dy/dx$ dalam situasi ini.




GAMBAR 1

Elemen baru dalam masalah ini adalah bahwa kita menghadapi sebuah persamaan yang secara gamblang (explisit) tidak terselesaikan untuk $y$. Apakah mungkin untuk mencari $dy/dx$ dalam keadaan seperti ini. Ya, diferensialkan kedua ruas persamaan

$$y^3 + 7y = x^3$$

terhadap $x$ dan samakan hasil-hasilnya. Dalam melakukan ini, kita anggap bahwa persamaan yang diberikan memang menentukan $y$ sebagai suatu fungsi $x$ (hanya saja kita tidak tahu bagaimana mencarinya secara eksplisit). Jadi, setelah memakai Aturan Rantai pada suku pertama, kita peroleh

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} + 7\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

Yang belakangan dapat diselesaikan untuk $dy/dx$ sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 + 7) = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{3y^2 + 7}$$

Perhatikan bahwa ungkapan kita untuk $dy/dx$ mencakup $x$ dan $y$, suatu kenyataan yang sering menyusahkan. Tetapi jika kita hanya ingin mencari kemiringan pada sebuah titik di mana koordinatnya diketahui, tidak ada kesukaran. Di (2, 1),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2)^2}{3(1)^2 + 7} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

Kemiringan adalah $\frac{6}{5}$

Metode yang baru saja digambarkan untuk mencari $dy/dx$ tanpa terlebih dahulu menyelesaikan persamaan yang diberikan untuk $y$ secara gamblang dalam bentuk $x$ disebut **pendiferensialan implisit**. Tetapi apakah metode tersebut masuk akal – apakah ia memberikan jawaban yang benar?

**SEBUAH CONTOH YANG DAPAT DIPERIKSA** untuk membuktikan kebenaran metode di atas, lihatlah contoh berikut, yang dapat dikerjakan dengan dua cara.

**CONTOH 1** Cari $dy/dx$ jika $4x^2y - 3y = x^3 - 1$.

***Penyelesaian***

METODE 1 Kita dapat menyelesaikan persamaan yang diberikan secara gamblang untuk $y$ sebagai berikut.

$$y(4x^2 - 3) = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4x^2 - 3)(3x^2) - (x^3 - 1)(8x)}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

METODE 2 **(Pendiferensialan Implisit).** Kita samakan turunan-turunan kedua ruas dari

$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$

Setelah memakai Aturan Hasilkali pada suku pertama, kita dapatkan

$$4x^2 \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 8x - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

Walaupun jawab ini kelihatan berlainan dari jawab yang diperoleh terdahulu, tetapi keduanya sama. Untuk melihat ini, gantikan $y = (x^3 - 1)/(4x^2 - 3)$ dalam ungkapan untuk $dy/dx$ yang baru saja diperoleh.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3} = \frac{3x^2 - 8x\dfrac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2} \qquad \blacksquare$$

**BEBERAPA KESUKARAN YANG TAK KENTARA** Jika sebuah persamaan dalam $x$ dan $y$ menentukan sebuah fungsi $y = f(x)$ dan fungsi ini terdiferensialkan, maka metode pendiferensialan implisit akan menghasilkan sebuah ungkapan yang benar untuk $dy/dx$. Terdapat dua "jika" besar dalam pernyataan ini.

Pertama perhatikan persamaan

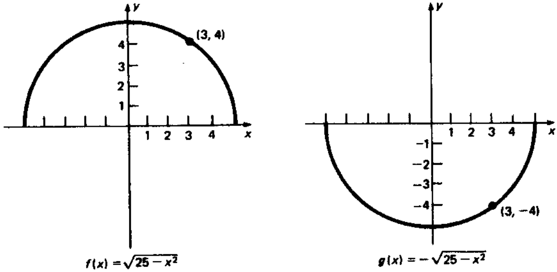
$$x^2 + y^2 = -1$$

Ia tidak mempunyai penyelesaian dan karena itu tidak menentukan suatu fungsi.

Sebaliknya,

$$x^2 + y^2 = 25$$

menentukan fungsi-fungsi $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ dan fungsi $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Grafik-grafik mereka diperlihatkan dalam Gambar 2.




GAMBAR 2

Untungnya, fungsi ini keduanya terdiferensialkan pada $(-5, 5)$. Pertama perhatikan $f$. Ia memenuhi

$$x^2 + [f(x)]^2 = 25$$

Bilamana kita diferensialkan secara implisit dan menyelesaikan untuk $f'(x)$, kita peroleh

$$2x + 2f(x)f'(x) = 0$$

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Perlakuan serupa secara lengkap terhadap $g(x)$ menghasilkan

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Untuk keperluan praktis, kita dapat memperoleh kedua hasil ini secara serempak dengan pendiferensialan secara implisit dari $x^2 + y^2 = 25$. Ini memberikan

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{jika } y = f(x) \\[2ex] \dfrac{-x}{-\sqrt{25 - x^2}} & \text{jika } y = g(x) \end{cases}$$

Secara wajar, hasilnya identik dengan yang diperoleh di atas.

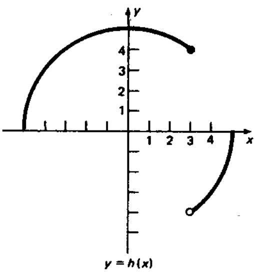
Perhatikan bahwa adalah cukup untuk mengetahui $dy/dx = -x/y$ agar dapat menerapkan hasil-hasil kita. Andaikan kita ingin mengetahui kemiringan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ bilamana $x = 3$. Nilai-nilai $y$ yang berpadanan adalah 4 dan $-4$ Kemiringan di (3, 4) dan (3, $-4$), masing-masing diperoleh dari penggantian $-x/y$ adalah $-\frac{3}{4}$ dan $\frac{3}{4}$ (lihat Gambar 2).

Untuk menyulitkan keadaan, kita tunjukkan bahwa

$$x^2 + y^2 = 25$$

menentukan banyak fungsi lainnya. Pandang fungsi $h$ yang didefinisikan oleh

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{jika } -5 \leq x \leq 3 \\ -\sqrt{25 - x^2} & \text{jika } \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$$




GAMBAR 3

Ia juga memenuhi $x^2 + y^2 = 25$, karena $x^2 + [h(x)]^2 = 25$. Tetapi ia bahkan tidak kontinu di $x = 3$, sehingga tentu saja tidak mempunyai turunan di sana (lihat Gambar 3).

Sementara subyek fungsi implisit menuju ke masalah teknis yang sukar (ditangani dalam kalkulus lanjut), masalah-masalah yang kita pelajari mempunyai penyelesaian langsung.

**LEBIH BANYAK CONTOH** Dalam contoh-contoh berikut, kita anggap bahwa persamaan yang diberikan menentukan satu atau lebih fungsi-fungsi terdiferensialkan yang turunan-turunannya dapat dicari dengan menerapkan pendiferensialan implisit.

**CONTOH 2** Cari $dy/dx$ jika $x^2 + 5y^3 = x + 9$.

*Penyelesaian*

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5y^3) = \frac{d}{dx}(x + 9)$$

$$2x + 15y^2\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

■

**CONTOH 3** Cari $D_t y$ jika $t^3 + t^2 y - 10y^4 = 0$.

***Penyelesaian***

$$D_t(t^3 + t^2 y - 10y^4) = D_t(0)$$

$$3t^2 + t^2 D_t y + y(2t) - 40y^3 D_t y = 0$$

$$D_t y(t^2 - 40y^3) = -3t^2 - 2ty$$

$$D_t y = \frac{3t^2 + 2ty}{40y^3 - t^2}$$

■

**CONTOH 4** Cari persamaan garis singgung pada kurva

$$y^3 - xy^2 + \cos xy = 2$$

di titik (0, 1).

***Penyelesaian*** Untuk menyederhanakan, kita gunakan notasi $y'$ untuk $dy/dx$. Bilamana kita mendiferensialkan kedua ruas dan menyamakan hasilnya, kita peroleh

$$3y^2 y' - x(2yy') - y^2 - (\sin xy)(xy' + y) = 0$$

$$y'(3y^2 - 2xy - x \sin xy) = y^2 + y \sin xy$$

$$y' = \frac{y^2 + y \sin xy}{3y^2 - 2xy - x \sin xy}$$

Di (0, 1), $y = \frac{1}{3}$. Sehingga, persamaan garis singgung di (0, 1) adalah

$$y - 1 = \tfrac{1}{3}(x - 0)$$

■

**ATURAN PANGKAT LAGI** Kita telah mempelajari bahwa $D_x(x^n) = nx^{n-1}$, di mana $n$ adalah sebarang bilangan bulat. Sekarang ini kita perluas pada kasus di mana $n$ adalah bilangan rasional sebarang.

> ***Teorema A***
>
> **(Aturan Pangkat). Andaikan $r$ bilangan rasional sebarang. Maka**
>
> $$D_x(x^r) = rx^{r-1}$$

***Bukti*** Karena $r$ rasional, maka $r$ dapat dituliskan sebagai $p/q$, di mana $p$ dan $q$ adalah bilangan-bilangan bulat dengan $q > 0$. Andaikan

$$y = x^r = x^{p/q}$$

Maka

$$y^q = x^p$$

dan, dengan pendiferensialan implisit,

$$qy^{q-1}D_x y = px^{p-1}$$

Jadi,

$$D_x y = \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}$$

$$= \frac{p}{q}x^{p-1-p+p/q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} = rx^{r-1}$$

Kita telah memperoleh hasil yang dikehendaki, tetapi – secara jujur – kita harus menunjukkan kekurangan dalam argumentasi kita. Dalam langkah pendiferensialan implisit, kita anggap bahwa $D_x y$ ada – yaitu, bahwa $y = x^{p/q}$ terdiferensialkan. Kita dapat mengisi kekosongan ini tetapi karena sukar, maka kita pindahkan pembuktian ke Apendiks (Pasal A.1, Teorema C). ■

**CONTOH 5** Cari $D_x y$ jika $y = 2x^{11/3} + 4x^{3/4} - 6/x^{2/3}$

***Penyelesaian*** Pertama kita tulis

$$D_x y = 2D_x(x^{11/3}) + 4D_x(x^{3/4}) - 6D_x(x^{-2/3})$$

Kemudian, memakai aturan yang baru saja dibuktikan.

$$D_x y = 2\cdot\tfrac{11}{3}x^{8/3} + 4\cdot\tfrac{3}{4}x^{-1/4} - 6(-\tfrac{2}{3})x^{-5/3}$$

$$= \tfrac{22}{3}x^{8/3} + 3x^{-1/4} + 4x^{-5/3}$$ ■

**CONTOH 6** Jika $y = \sqrt{t^4 - 3t + 17}$, cari $dy/dt$.

***Penyelesaian*** Pikirkan ini sebagai

$$y = u^{1/2} \quad \text{dan} \quad u = t^4 - 3t + 17$$

dan terapkan Aturan Rantai.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dt}$$

$$= \left(\frac{1}{2}u^{-1/2}\right)(4t^3 - 3)$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)(4t^3 - 3)$$

$$= \frac{4t^3 - 3}{2\sqrt{t^4 - 3t + 17}}$$ ■

## SOAL-SOAL 3.8 PR

Dengan menganggap bahwa tiap persamaan dalam Soal-soal 1-12 mendefinisikan sebuah fungsi $x$ yang terdiferensialkan, cari $D_x y$ memakai pendiferensialan implisit.

1. $x^2 - y^2 = 9$
2. $4x^2 + 9y^2 = 36$
3. $xy = 4$
4. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, di mana $a,b$ konstanta
5. $xy^2 - x + 16 = 0$
6. $x^3 - 3x^2y + 19xy = 0$
7. $4x^3 + 11xy^2 - 2y^3 = 0$
8. $\sqrt{xy} + 3y = 10x$
9. $6x - \sqrt{2xy} + xy^3 = y^2$
10. $\dfrac{y^2}{x^3} - 1 = y^{3/2}$
11. $xy + \sin y = x^2$
12. $\cos(xy) = y^2 + 2x$

Dalam Soal-soal 13-18, cari persamaan garis singgung di titik yang ditunjuk (lihat Contoh 4).

13. $x^3y + y^3x = 10$; $(1, 2)$
14. $x^2y^2 + 3xy = 10y$; $(2, 1)$
15. $\sin(xy) = y$; $(\pi/2, 1)$
16. $y + \cos(xy^2) + 3x^2 = 4$; $(1, 0)$
17. $x^{2/3} - y^{2/3} - 2y = 2$; $(1, -1)$
18. $\sqrt{y} + xy^2 = 5$; $(4, 1)$

Dalam Soal-soal 19-32, cari $dy/dx$ (lihat Contoh 5 dan 6).

19. $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$
20. $y = \sqrt[3]{x} - 2x^{7/2}$
21. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$
22. $y = \sqrt[4]{2x + 1}$
23. $y = \sqrt[4]{3x^2 - 4x}$
24. $y = (x^3 - 2x)^{1/3}$
25. $y = \dfrac{3}{(x^3 + 2x)^{2/3}}$
26. $y = (3x - 9)^{-5/3}$
27. $y = \sqrt{x^2 + \sin x}$
28. $y = \sqrt{x^2 \cos x}$
29. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 \sin x}}$
30. $y = \sqrt[4]{1 + \sin 5x}$
31. $y = \sqrt[4]{1 + \cos(x^2 + 2x)}$
32. $y = \sqrt{\tan^2 x + \sin^2 x}$

33. Jika $s^2t + t^3 = 1$, cari $ds/dt$ dan $dt/ds$.

34. Jika $y = \sin(x^2) + 2x^3$, cari $dx/dy$.

35. Sketsakan grafik lingkaran

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$$

dan kemudian cari persamaan-persamaan untuk dua garis singgung yang melalui titik asal.

36. Cari persamaan garis normal (garis tegak lurus pada garis singgung) pada kurva $8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2)$ di $(3, 1)$. dan pers garis singgung

37. Andaikan $xy + y^3 = 2$. Maka pendiferensialan implisit dua kali terhadap $x$ masing-masing menghasilkan:

(a) $xy' + y + 3y^2y' = 0$;
(b) $xy'' + y' + y' + 3y^2y'' + 6y(y')^2 = 0$.

Selesaikan (a) untuk $y'$ dan gantikan dalam (b), kemudian selesaikan untuk $y''$.

*) Garis normal : garis yg tegak lurus dg garis singgung

38. Cari $y''$ jika $x^3 - 4y^2 + 3 = 0$ (lihat Soal 37).

39. Cari $y''$ di (2, 1) jika $2x^2y - 4y^3 = 4$ (lihat Soal 37).

40. Gunakan pendiferensialan implisit dua kali untuk mencari $y''$ di (3, 4) jika $x^2 + y^2 = 25$.

41. Perlihatkan bahwa garis normal pada $x^3 + y^3 = 3xy$ di $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ melalui titik asal.

42. Perlihatkan bahwa hiperbol-hiperbol $xy = 1$ dan $x^2 - y^2 = 1$ berpotongan saling tegak lurus.

43. Buktikan bahwa grafik dari $2x^2 + y^2 = 6$ dan $y^2 = 4x$ berpotongan saling tegak lurus.

44. Andaikan kurva-kurva $C_1$ dan $C_2$ berpotongan di $(x_0, y_0)$ dengan kemiringan masing-masing $m_1$ dan $m_2$. Maka (lihat Soal 28 dari Pasal 2.3) sudut positif $\theta$ dari $C_1$ (yaitu, dari garis singgung ke $C_1$ di $(x_0, y_0)$) ke $C_2$ memenuhi

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Cari sudut-sudut dari lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ ke lingkaran $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ pada kedua titik potongnya.

45. Cari sudut dari garis $y = 2x$ pada kurva $x^2 - xy + 2y^2 = 28$ pada titik-titik potongnya di kuadran pertama (lihat Soal 44).

46. Sebuah partikel dengan massa $m$ bergerak sepanjang sumbu-$x$ sehingga posisi $x$ dan kecepatan $v = dx/dt$ memenuhi

$$m(v^2 - v_0^2) = k(x_0^2 - x^2)$$

di mana $v_0$, $x_0$, dan $k$ adalah konstanta-konstanta. Buktikan dengan memakai pendiferensialan implisit bahwa

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

bilamana $v \neq 0$.

47. Kurva $x^2 - xy + y^2 = 16$ merupakan sebuah ellips yang berpusat di titik asal dan garis $y = x$ sebagai sumbu utamanya. Tentukanlah persamaan garis-garis singgung pada dua titik di mana ellips tersebut memotong sumbu-$x$.

48. Tentukan titik-titik pada kurva $x^2y - xy^2 = 2$ yang garis singgungnya vertikal, yaitu di mana $dx/dy = 0$.

## 3.9 Laju yang Berkaitan

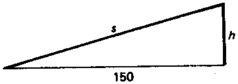
Jika variabel $y$ tergantung kepada waktu $t$, maka turunannya $dy/dt$ disebut **laju sesaat perubahan**. Tentu saja, jika $y$ mengukur jarak, maka laju sesaat perubahan ini juga disebut kecepatan. Kita tertarik pada beraneka laju sesaat, laju air mengalir ke dalam ember, lalu membesarnya luas pencemaran minyak, laju bertambahnya nilai kapling tanah, dan lain-lainnya. Jika $y$ diberikan secara gamblang (eksplisit) dalam bentuk $t$, maka masalahnya sederhana; kita cukup mendiferensialkan dan kemudian menghitung turunan pada saat yang diminta.

Mungkin saja, sebagai ganti diketahuinya $y$ secara gamblang dalam bentuk $t$, kita mengetahui hubungan yang mengaitkan $y$ dan variabel lain $x$ dan kita juga mengetahui sesuatu tentang $dx/dt$. Kita masih tetap mampu mencari $dy/dt$, karena $dy/dt$ dan $dx/dt$ adalah **laju-laju yang berkaitan**. Biasanya ini akan memerlukan pendiferensialan implisit.

**DUA CONTOH SEDERHANA** Sebagai persiapan menyusun prosedur yang sistematis untuk menyelesaikan masalah laju-laju yang berkaitan, kita bahas dua contoh.

**CONTOH 1** Sebuah balon dilepas pada jarak 150 kaki dari seorang pengamat yang berdiri di tanah. Jika balon naik secara lurus ke atas dengan laju 8 meter/detik, seberapa cepat jarak antara pengamat dan balon bertambah pada waktu balon pada ketinggian 50 kaki?

***Penyelesaian*** Andaikan $t$ menyatakan banyaknya detik setelah balon dilepas. Andaikan $h$ menyatakan ketinggian balon dan $s$ jaraknya dari pengamat (lihat Gambar 1). Variabel $h$ dan $s$ keduanya tergantung kepada $t$; tetapi alas segitiga (jarak dari pengamat ke titik pelepasan) tetap tidak berubah dengan bertambahnya $t$. Kita tekankan bahwa gambar yang kita buat sahih untuk semua $t > 0$.




GAMBAR 1

Selanjutnya kita bertanya (dan menjawab) dua pertanyaan dasar tentang $h$ dan $s$.

(a) Apa yang diketahui? *Jawab*: $dh/dt = 8$.

(b) Apa yang ingin kita ketahui? *Jawab*: Kita ingin mengetahui $ds/dt$ pada saat $h = 50$.

Variabel $s$ dan $h$ berubah dengan waktu (mereka adalah fungsi-fungsi implisit dari $t$), tetapi mereka selalu dihubungkan dengan persamaan Pythagoras

$$s^2 = h^2 + (150)^2$$

Jika kita diferensialkan secara implisit terhadap $t$ dan memakai Aturan Rantai, kita peroleh

$$2s\frac{ds}{dt} = 2h\frac{dh}{dt}$$

atau

$$s\frac{ds}{dt} = h\frac{dh}{dt}$$

Hubungan ini juga berlaku untuk semua $t > 0$.

Sekarang, dan *bukan sebelumnya*, kita berpaling pada situasi bilamana $h = 50$. Dari persamaan Pythagoras, kita lihat bahwa, bilamana $h = 50$

$$s = \sqrt{(50)^2 + (150)^2} = 50\sqrt{10}$$

Dengan menggantikan $s(ds/dt) = h(dh/dt)$ menghasilkan

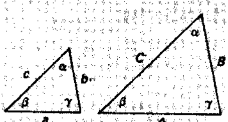
$$50\sqrt{10}\frac{ds}{dt} = 50(8)$$

atau

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2{,}53$$

**SEGITIGA SEBANGUN**

**Dua segitiga dikatakan sebangun apabila sudut-sudutnya yang bersesuaian sama besar.**




**Dari geometri, kita pelajari bahwa perbandingan antara sisi-sisi yang bersesuaian dari kedua segitiga itu adalah sama. Sebagai contoh,**

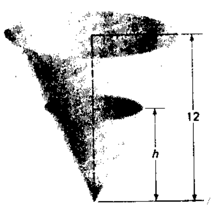
$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}$$

**Kenyataan ini, sebagaimana dipakai dalam Contoh 2, akan sering diperlukan pada himpunan soal.**

Pada saat $h = 50$, jarak antara balon dan pengamat bertambah dengan kecepatan 2,53 kaki/detik. ■

**CONTOH 2** Air dituangkan ke dalam bak bentuk kerucut dengan laju 8 dm/menit. Jika tinggi bak adalah 12 dm dan jari-jari permukaan atas adalah 6 dm, seberapa cepat permukaan air naik bilamana tinggi permukaan adalah 4 dm?

***Penyelesaian*** Nyatakan tinggi permukaan air dalam bak pada saat $t$ sebarang adalah $h$ dan andaikan $r$ jari-jari permukaan air yang berpadanan (lihat Gambar 2).




**GAMBAR 2**

*Diketahui* bahwa $V$ volume air dalam bak naik dengan laju 8 dm/menit: yaitu $dV/dt = 8$. Kita ingin mengetahui seberapa cepat air naik – yakni, $dh/dt$ – pada saat $h = 4$.

Kita perlu mencari sebuah persamaan yang mengaitkan $V$ dan $h$. Rumus untuk volume air dalam bak, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, mengandung variabel $r$ yang tidak diinginkan, tidak diinginkan karena kita tidak mengetahui lajunya $dr/dt$. Tetapi, memakai segitiga-segitiga yang serupa (lihat Gambar 2), kita mempunyai $r/h = 6/12$, sehingga $r = h/2$. Dengan penggantian ini dalam $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ memberikan

$$V = \frac{\pi h^3}{12}$$

sebuah hubungan yang berlaku untuk semua $t > 0$.

Sekarang kita diferensialkan secara implisit, dengan tetap mengingat bahwa $h$ tergantung kepada $t$. Kita peroleh

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi h^2}{12}\frac{dh}{dt}$$

atau

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

Pada saat ini, bukannya lebih dini, kita tinjau situasi bilamana $h = 4$. Dengan penggantian $h = 4$ dan $dV/dt = 8$, kita peroleh

$$8 = \frac{\pi(4)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

dari mana

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$$

Bilamana ketinggian air 4 dm, permukaan air naik dengan laju 0,637 dm/menit.

Jika anda pikirkan sejenak, anda menyadari bahwa permukaan air akan naik semakin lambat dengan berlalunya waktu. Misalnya, bilamana $h = 10$

$$8 = \frac{\pi(10)^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

sehingga $dh/dt = 32/100\pi \approx 0{,}102$ dm/menit.

Apa yang sebenarnya kita katakan ialah bahwa percepatan $d^2h/dt^2$ negatif. Kita dapat menghitung sebuah ungkapan untuknya. Pada sebarang waktu $t$,

$$8 = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$$

sehingga

$$\frac{32}{\pi} = h^2\frac{dh}{dt}$$

Jika kita diferensialkan secara implisit lagi, kita peroleh

$$0 = h^2\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{dh}{dt}\left(2h\frac{dh}{dt}\right)$$

dari mana

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{-2\left(\dfrac{dh}{dt}\right)^2}{h}$$

Ini jelas negatif. ■

**PROSEDUR SISTEMATIS** Contoh 1 dan 2 mengemukakan metode berikut untuk menyelesaikan masalah laju-laju yang berkaitan.

***Langkah 1*** Andaikan $t$ menyatakan waktu. Gambarlah diagram yang berlaku untuk semua $t > 0$. Beri pengenal besaran-besaran yang nilainya tidak berubah bila $t$ bertambah, dengan nilai-nilai konstanta yang diketahui. Berikan nama huruf pada besaran yang berubah sesuai waktu, dan bubuhkan garis-garis yang sesuai dari gambar dengan variabel-variabel ini.

***Langkah 2*** Nyatakan apa yang diketahui dan informasi apa yang diinginkan tentang variabel-variabel. Informasi ini akan berbentuk turunan-turunan terhadap $t$.

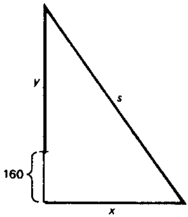
***Langkah 3*** Tulislah sebuah persamaan yang menghubungkan variabel-variabel yang sahih untuk semua waktu $t > 0$, bukan hanya pada beberapa saat tertentu.

***Langkah 4*** Diferensialkan persamaan yang ditemukan dalam Langkah 3 secara implisit terhadap $t$. Persamaan yang dihasilkan, memuat turunan-turunan terhadap $t$, sahih untuk semua $t > 0$.

***Langkah 5*** Gantikan persamaan yang ditemukan dalam Langkah 4 untuk semua data yang sahih pada saat tertentu untuk mana jawab masalah disyaratkan. Selesaikan turunan yang diinginkan.

**CONTOH 3** Sebuah pesawat udara terbang ke utara dengan kecepatan 640 km/jam melintasi sebuah kota tertentu pada tengah hari, dan sebuah pesawat kedua terbang ke timur dengan laju 600 km/jam secara langsung melewati kota yang sama 15 menit kemudian. Jika pesawat-pesawat itu terbang pada ketinggian yang sama, seberapa cepat mereka berpisah pada pukul 13.15?

*Penyelesaian*




GAMBAR 3

*Langkah 1* Andaikan $t$ menyatakan banyaknya jam setelah pukul 12.15. Gambar 3 memperlihatkan situasi untuk semua $t > 0$. Jarak dalam km dari kota ke pesawat terbang yang ke utara pada saat $t = 0$ (pukul 12.15) diberi pengenal dengan konstanta $\frac{640}{4} = 160$. Untuk $t > 0$, kita andaikan $y$ menyatakan jarak dalam km yang diterbangi oleh pesawat arah utara (setelah pukul 12.15), $x$ jarak yang diterbangi oleh pesawat arah timur, dan $s$ jarak antara pesawat-pesawat.

*Langkah 2* Untuk semua $t > 0$, diketahui bahwa, $dy/dt = 640$ dan $dx/dt = 600$. Kita ingin mengetahui $ds/dt$ pada saat $t = 1$, yaitu pukul 13.15.

*Langkah 3* Menurut Teorema Pythagoras,

$$s^2 = x^2 + (y + 160)^2$$

*Langkah 4* Dengan mendiferensialkan secara implisit terhadap $t$ dan memakai Aturan Rantai, kita mempunyai

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2(y + 160)\frac{dy}{dt}$$

atau

$$s\frac{ds}{dt} = x\frac{dx}{dt} + (y + 160)\frac{dy}{dt}$$

*Langkah 5* Untuk semua $t > 0$, $dx/dt = 600$ dan $dy/dt = 640$, sedangkan pada saat khusus $t = 1$, $x = 600$, $y = 640$, dan $s = \sqrt{(600)^2 + (640 + 160)^2} = 1000$. Bilamana kita menggantikan data-data ini dalam persamaan Langkah 4, kita peroleh

$$1000\frac{ds}{dt} = (600)(600) + (640 + 160)(640)$$

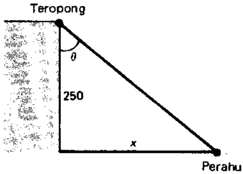
sehingga

$$\frac{ds}{dt} = 872$$

Pada pukul 13.15, pesawat-pesawat itu berpisah dengan kecepatan 872 km/jam. ■

**CONTOH 4** Seorang wanita berdiri pada karang memandang sebuah perahu motor yang bergerak ke arah pantai tepat di bawahnya dengan mempergunakan teropong. Jika teropong berada 250 kaki di atas permukaan laut dan jika perahu mendekat dengan laju 20 kaki/detik, berapa laju perubahan sudut teropong pada waktu perahu berada 250 kaki dari pantai?

***Penyelesaian***




**GAMBAR 4**

***Langkah 1*** Kita buat sebuah gambar (Gambar 4) dan perkenalkan variabel-variabel $x$ dan $\theta$, seperti ditunjukkan.

***Langkah 2*** Diketahui bahwa $dx/dt = -20$; tanda adalah negatif karena $x$ berkurang dengan berlalunya waktu. Kita ingin mengetahui $d\theta/dt$ pada saat $x = 20$.

***Langkah 3*** Dari ilmu ukur segitiga,

$$\tan \theta = \frac{x}{250}$$

***Langkah 4*** Kita diferensialkan secara implisit memakai kenyataan bahwa $D_\theta \tan \theta = \sec^2 \theta$ (Contoh 2 dari Pasal 3.4). Kita peroleh

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250} \frac{dx}{dt}$$

***Langkah 5*** Pada saat $x = 250$, $\theta$ adalah $\pi/4$ radian dan $\sec \theta = \sec^2(\pi/4) = 2$. Jadi,

$$2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{250}(-20)$$

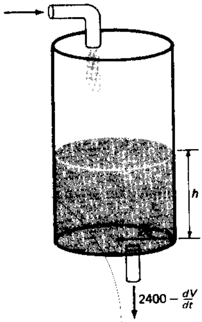
atau

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{25} = -0{,}04$$

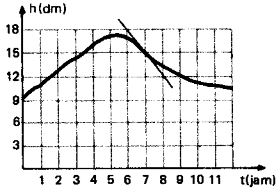
Sudut berubah dengan laju $-0{,}04$ radian/detik. Tanda adalah negatif karena $\theta$ berkurang dengan berlalunya waktu. ■

**MASALAH LAJU YANG BERKAITAN SECARA GRAFIK** Seringkali dalam situasi kehidupan yang nyata, kita tidak mengetahui rumus untuk suatu fungsi tertentu, tetapi hanya mempunyai grafik yang ditentukan secara empiris. Kita masih tetap mampu menjawab pertanyaan-pertanyaan tentang laju.

**CONTOH 5** Kota Bogor memantau ketinggian air dalam tangki air berbentuk tabung dengan alat pencatat otomatis. Secara tetap air dipompa ke dalam tangki dengan laju 2400 dm/jam, seperti diperlihatkan dalam Gambar 5. Selama suatu periode 12 jam tertentu (dimulai pada tengah malam), permukaan air naik dan turun sesuai dengan grafik dalam Gambar 6. Jika jari-jari tangki adalah 20 dm, berapa laju air yang sedang digunakan pada pukul 7.00?




**GAMBAR 5**




**GAMBAR 6**

***Penyelesaian*** Andaikan $t$ menyatakan banyaknya jam setelah tengah malam, $h$ ketinggian air dalam tangki pada saat $t$, dan $V$ volume air dalam tangki pada saat itu (lihat Gambar 5). Maka $2400 - dV/dt$ adalah laju pada mana air sedang digunakan pada sebarang waktu $t$. Karena kemiringan garis singgung di $t = 7$ kira-kira $-3$ (lihat Gambar 6), kita simpulkan bahwa $dh/dt \approx -3$ pada saat itu.

Untuk sebuah tabung, $V = \pi r^2 h$, sehingga

$$V = \pi(20)^2 h$$

dari mana

$$\frac{dV}{dt} = 400\pi \frac{dh}{dt}$$

Pada $t = 7$,

$$\frac{dV}{dt} \approx 400\pi(-3) \approx -3770$$

Jadi penduduk Kota Bogor menggunakan air dengan laju $2400 + 3770 = 6170$ dm/jam pada pukul 7.00. ∎

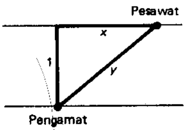
## SOAL-SOAL 3.9

1. Rusuk kubus yang berubah bertambah panjang dengan laju 3 cm/detik. Berapa kecepatan pertambahan volume kubus pada saat panjang rusuk 10 cm?

2. Dengan anggapan bahwa bola sabun bentuknya tidak berubah selama bola itu berkembang, berapa cepat jari-jarinya bertambah pada saat panjangnya 2 cm, jika

udara ditiupkan ke dalam bola dengan laju 4 cm/detik?

3. Sebuah pesawat udara, terbang mendatar pada ketinggian 1 km, melintasi seorang pengamat. Jika laju pesawat itu tetap sebesar 240 km/jam, berapa cepat jarak dari pengamat bertambah 30 detik kemudian? *Petunjuk:* Gunakan Gambar 7 dan perhatikan bahwa dalam 30 detik ($\frac{1}{120}$ jam), pesawat menempuh 2 km.




**GAMBAR 7**

4. Seorang mahasiswa memakai sebuah sedotan untuk minum dari gelas kertas berbentuk kerucut, yang sumbunya tegak, dengan laju 3 cm/detik. Jika tinggi gelas 10 cm dan garis tengah mulut gelas 6 cm, berapa cepat menurunnya permukaan cairan pada saat kedalaman cairan 5 cm?

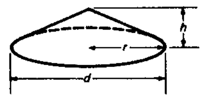
5. Sebuah pesawat udara, terbang ke barat dengan kecepatan 400 km/jam, melintasi sebuah kota tertentu pada pukul 11.30, dan sebuah pesawat kedua, pada ketinggian yang sama, terbang ke selatan dengan kecepatan 500 km/jam, melintasi kota itu pada tengah hari. Seberapa cepat mereka berpisah pada pukul 13.00? *Petunjuk:* Lihat Contoh 3.

6. Seorang di dermaga menarik tali yang diikatkan pada sebuah sampan. Jika tangan orang tersebut 12 dm lebih tinggi daripada titik tempat tali diikatkan pada sampan dan jika ia menarik tali dengan kecepatan 3 dm/detik, seberapa cepat perahu mendekati dermaga pada waktu panjang tali masih 20 dm?

7. Sebuah tangga panjang 20 dm bersandar di dinding. Jika ujung bawah tangga ditarik sepanjang lantai menjauhi dinding dengan kecepatan 2 dm/detik, seberapa cepat ujung atas tangga bergeser menuruni dinding pada waktu ujung bawah tangga sejauh 4 dm dari dinding?

8. Minyak dari kapal tangki yang pecah menyebar dalam pola melingkar. Jika jari-jari lingkaran bertambah pada laju tetap sebesar 1,5 dm/detik, seberapa cepat meluasnya daerah yang cukup setelah 2 jam?

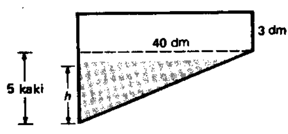
9. Dari sebuah pipa mengalir pasir dengan laju 16 dm/detik. Jika pasir yang keluar membentuk tumpukan berupa kerucut pada tanah yang tingginya selalu ¼ garis tengah atas, seberapa cepat tingginya bertambah pada saat tinggi tumpukan 4 dm? *Petunjuk:* Gunakan Gambar 8 dan gunakan kenyataan bahwa $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.




**GAMBAR 8**

10. Seorang anak menerbangkan layang-layang. Jika tinggi layang-layang 90 dm di atas tingkat tangan anak itu dan angin meniupnya pada arah mendatar dengan laju 5 dm/detik, seberapa cepat anak tersebut mengulur benang pada saat panjangnya 150 dm? (Anggap benang membentuk sebuah garis, walaupun sebenarnya anggapan ini tidak realistis).

11. Sebuah kolam renang panjangnya 40 dm, lebar 20 dm, kedalaman 8 dm pada ujung yang dalam dan kedalaman 3 dm pada ujung dangkal; alasnya berupa siku empat (lihat Gambar 9). Jika kolam diisi dengan memompakan air ke dalamnya dengan laju 40 dm/menit, seberapa cepat permukaan air naik pada saat dalamnya pada ujung yang dalam adalah 3 dm?




**GAMBAR 9**

12. Sebuah partikel $P$ bergerak sepanjang grafik $y = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geqslant 2$, sehingga koordinat-$x$ titik $P$ bertambah dengan laju 5 satuan/detik. Seberapa cepat koordinat-$y$ titik $P$ bertambah pada saat $x = 3$?

13. Sebuah cakram baja memuai selama dipanaskan. Jika jari-jarinya bertambah dengan laju 0,02 cm/detik, seberapa cepat luas salah satu mukanya bertambah pada saat jari-jarinya adalah 8,1 cm?

14. Dua buah kapal berlayar dari pelabuhan pulau yang sama, satu ke utara dengan laju 24 knot (24 mil laut/jam) dan yang lain ke timur dengan laju 30 knot. Kapal arah utara berangkat pada pukul 9.00 dan yang arah timur berangkat pukul 11.00. Seberapa cepat jarak antara mereka bertambah pada pukul 14.00?

*Petunjuk:* Andaikan $t = 0$ pada pukul 11.00.

15. Lampu di mercu suar 1 km di lepas pantai berputar dengan 2 putaran/menit. Seberapa cepat sorotan cahaya bergerak sepanjang garis pantai pada saat ia melewati titik $\frac{1}{2}$ km dari titik yang berseberangan dengan mercu suar.

C 16. Seorang pengintai pesawat udara mengamati sebuah pesawat yang terbang ke arahnya pada ketinggian 4000 kaki. Ia mengamati bahwa pada waktu sudut elevasi sebesar $\frac{1}{2}$ radial, kecepatan pesawat tersebut bertambah dengan laju $\frac{1}{10}$ radian/detik. Berapa kecepatan pesawat itu?

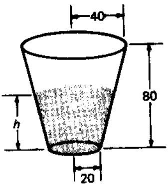
17. Andi, yang tingginya 6 dm, berjalan menjauhi sebuah lampu jalan yang tingginya 30 dm dengan laju 2 dm/detik.
(a) Seberapa cepat panjang bayangannya bertambah pada saat Andi sejauh 24 dm dari tiang lampu? 30 dm?
(b) Seberapa cepat ujung bayangannya bergerak?
(c) Untuk mengikuti ujung bayangannya, pada kecepatan sudut berapa ia harus mengangkat kepalanya pada saat panjang bayangannya 6 dm?

18. Sudut puncak yang berhadapan dengan alas sebuah segitiga sama kaki dengan sisi yang sama panjangnya 100 cm bertambah besar dengan laju radial/menit. Seberapa cepat bertambahnya luas segitiga pada saat sudut puncak sebesar $\pi/6$ radian?. *Petunjuk:* Luas = $\frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

19. Jembatan layang jalan raya melintasi rel kereta api yang berada tegak lurus 100 kaki di bawahnya. Jika sebuah mobil berjalan dengan 45 mil/jam (66 kaki/detik) berada tepat di atas kereta api yang melaju dengan kecepatan 60 mil/jam (88 kaki/detik), seberapa cepat mereka berpisah 10 detik kemudian?

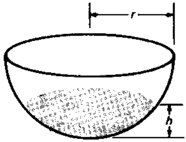
20. Air dipompa dengan laju seragam 2 liter/menit (1 liter = 1000 sentimeter kubik) ke dalam sebuah tangki membentuk sebagian dari kerucut lingkaran tegak. Tinggi tangki 80 cm dan jari-jari bawah dan atas masing-masing sepanjang 20 cm dan 40 cm (Gambar 10). Seberapa cepat permukaan air naik pada saat kedalaman air 30 cm? *Catatan:* Volume $V$, sebagian dari kerucut lingkaran tegak dengan tinggi $h$, jari-jari bawah $a$, dan jari-jari atas $b$ adalah

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot (a^2 + ab + b^2).$$




**GAMBAR 10**

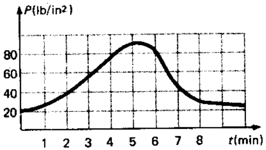
21. Air keluar dari bawah tangki berbentuk setengah bola yang jari-jarinya 8 dm dengan laju 2 dm/jam. Pada suatu saat tertentu tangki tersebut penuh. Seberapa cepat permukaan air berubah pada saat tingginya $h$ adalah 3 dm? *Catatan:* Volume segmen bola dengan jari-jari $r$ dan tinggi $h$ adalah $\pi h^2 [r - (h/3)]$. (Lihat Gambar 11).




**GAMBAR 11**

22. Jarum-jarum sebuah jam panjangnya 5 cm (jarum menit) dan 4 cm (jarum jam). Seberapa cepat jarak antara ujung-ujung jarum berubah pada pukul 3.00?

23. Sebuah tabung lingkaran tegak dengan sebuah piston pada salah satu ujung, diisi dengan gas. Volumenya berubah secara kontinu karena gerakan piston. Jika suhu gas dipegang tetap, maka – menurut Hukum Boyle – $PV = k$, dengan $P$ adalah tekanan (pon per inci kuadrat), $V$ adalah volume (inci kubik), dan $k$ konstanta. Tekanan dimonitor memakai alat pencatat selama satu periode 10-menit. Hasil-hasilnya diperlihatkan dalam Gambar 12. Kira-kira seberapa cepat volume berubah pada saat $t = 6{,}5$ jika volumenya adalah 300 inci kubik pada saat itu? (Lihat Contoh 5)




**GAMBAR 12**

24. Kerjakan Contoh 5 dalam teks dengan menganggap tangki air berbentuk bola yang jari-jarinya 20 kaki (Lihat Soal 21 untuk volume sebuah segmen bola).

25. Sebuah tangga yang panjangnya 18 kaki bersandar pada dinding vertikal 12 kaki sehingga bagian atasnya melewati dinding. Kemudian ujung bawah tangga itu ditarik mendatar menjauhi dinding dengan 2 kaki per detik.
(a) Tentukan kecepatan vertikal dari ujung atasnya pada saat tangga tersebut membentuk sudut $60°$ terhadap tanah.
(b) Tentukan percepatan vertikal pada saat yang sama.

26. Sebuah bola baja berada di dasar tangki dari Soal 21. Jawablah pertanyaan yang dikemukakan di sana apabila bolanya berjari-jari (a) 6 inci, (b) 2 kaki.

27. Sebuah bola salju meleleh pada suatu tingkat yang sebanding dengan luas permukaannya.
(a) Tunjukkan bahwa jari-jarinya memendek secara konstan.
(b) Apabila bola itu meleleh menjadi $\frac{8}{27}$ dari volume semula dalam waktu satu jam, berapa lamakah bola itu akan habis meleleh?

28. Sebuah bola baja akan jatuh $16\,t^2$ kaki dalam $t$ detik. Bola seperti itu dijatuhkan dari ketinggian 64 kaki pada suatu jarak horisontal 10 kaki terhadap sebuah lampu jalan yang tingginya 48 kaki. Seberapa cepatkah bayangan bola itu bergerak pada saat bolanya menyentuh tanah?

## 3.10 Diferensial dan Aproksimasi

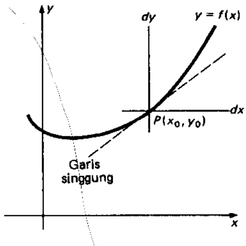
Kita telah menggunakan notasi Leibniz $dy/dx$ untuk turunan $y$ terhadap $x$. Sampai sekarang, kita telah memperlakukan $dy/dx$ sebagai lambang belaka dan tidak mencoba memberikan arti tersendiri pada $dy$ dan $dx$. Itulah yang kita usulkan untuk dilakukan sekarang.

Untuk memberi motivasi definisi kita, andaikan $P(x_0, y_0)$ adalah titik tetap pada grafik $y = f(x)$, seperti diperlihatkan dalam Gambar 1. Dengan $P$ sebagai titik asal, perkenalkan sumbu-sumbu koordinat baru (sumbu-sumbu $dx$ dan $dy$) sejajar dengan sumbu-sumbu

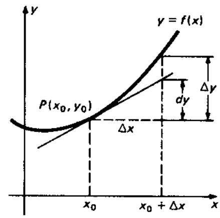
$x$ dan $y$ yang lama. Dalam sistem koordinat yang baru ini, garis singgung di $P$ secara khas mempunyai persamaan sederhana, yakni $dy = m\,dx$, di mana $m$ adalah kemiringannya. Tetapi kemiringan $m$ terhadap sistem koordinat baru sama saja seperti terhadap sistem $xy$ lama. Jadi, $m = f'(x_0)$, sehingga persamaan garis singgung boleh dituliskan

$$dy = f'(x_0)\,dx$$

Kegunaan gagasan ini terletak pada kenyataan dasar bahwa garis singgung tersebut sangat dekat pada kurva $y = f(x)$ di sekitar $P(x_0, y_0)$ (lihat Gambar 2). Jadi jika $x$ mendapatkan pertambahan kecil $\Delta x = dx$, pertambahan yang berpadanan dalam $y$ pada kurva adalah $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, sedangkan pada garis singgung adalah $dy = f'(x_0)\Delta x$. Tetapi $dy$ merupakan suatu aproksimasi terhadap $\Delta y$ dan hanya berupa konstanta kali $\Delta x$, yang secara normal lebih mudah dihitung. Kita selidiki percabangan kenyataan ini nanti dalam pasal ini.




GAMBAR 1




GAMBAR 2

**DIFERENSIAL TERDEFINISI** Berikut adalah definisi formal dari diferensial.

> *Definisi*
>
> **(Diferensial).** Andaikan $y = f(x)$ terdiferensialkan di $x$ dan andaikan bahwa $dx$, diferensial dari variabel bebas $x$, menyatakan pertambahan sebarang dari $x$. Diferensial yang bersesuaian dengan $dy$ dari variabel tak bebas $y$ didefinisikan oleh
>
> $$dy = f'(x)\,dx$$

**CONTOH 1** Cari $dy$ jika (a) $y = x^3 - 3x + 1$. (b) $y = \sqrt{x^2 + 3x}$. (c) $y = \sin(x^4 - 3x^2 + 11)$.

*Penyelesaian* Jika kita mengetahui bagaimana menghitung turunan, maka kita tahu bagaimana menghitung diferensial. Kita hanya menghitung turunan dan mengalikannya dengan $dx$.

(a) $dy = (3x^2 - 3)\,dx$

(b) $dy = \frac{1}{2}(x^2 + 3x)^{-1/2}(2x + 3)\,dx = \dfrac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}\,dx$

(c) $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11)\cdot(4x^3 - 6x)\,dx$ ■

Sekarang anda perlu memperhatikan beberapa hal. Pertama, karena $dy = f'(x)\,dx$, pembagian kedua ruas oleh $dx$ menghasilkan

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

**anda dapat melakukannya; menafsirkan turunan sebagai suatu hasilbagi dua diferensial.**

Kedua, berpadanan terhadap setiap aturan turunan, terdapat aturan diferensial yang diperoleh dari yang lebih dahulu dengan memperkalikan dengan $dx$. Kita gambarkan aturan-aturan utama dalam tabel di bawah.

| *Aturan Turunan* | *Aturan Diferensial* |
|---|---|
| 1. $\frac{dk}{dx} = 0$ | 1. $dk = 0$ |
| 2. $\frac{d(ku)}{dx} = k\frac{du}{dx}$ | 2. $d(ku) = k\,du$ |
| 3. $\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ | 3. $d(u+v) = du + dv$ |
| 4. $\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ | 4. $d(uv) = u\,dv + v\,du$ |
| 5. $\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$ | 5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ |
| 6. $\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ | 6. $d(u^n) = nu^{n-1}\,du$ |

Ketiga, meskipun definisi $dy$ menganggap bahwa $xy$ adalah sebuah variabel bebas, anggapan tersebut tidak penting. Andaikan $y = f(x)$, dengan $x = g(t)$. Maka $t$ adalah variabel bebas dan $x$ dan $y$ keduanya tergantung padanya. Sekarang

$$dx = g'(t)\,dt$$

dan karena

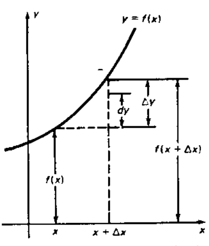
$$y = f(g(t))$$

$$dy = f'(g(t))g'(t)\,dt$$

$$= f'(x)\,dx$$

Perhatikan bahwa $dy$ ternyata adalah $f'(x)dx$, sama halnya seperti jika $x$ adalah variabel bebas.

Akhirnya, kami serukan satu peringatan. *Hati-hatilah membedakan turunan dan diferensial.* Mereka tidak sama. Bilamana anda menulis $D_xy$ atau $dy/dx$, anda memakai lambang untuk turunan, bilamana anda menuliskan $dy$, anda menyatakan diferensial. Jangan ceroboh dan menuliskan $dy$ bilamana anda bermaksud memberi label suatu turunan. Itu akan menimbulkan kebingungan yang berlarut-larut.




GAMBAR 3

**APROKSIMASI** Diferensial akan memainkan beberapa peranan dalam buku ini, tetapi untuk sekarang penggunaan utamanya adalah dalam penyediaan aproksimasi. Kami telah menunjukkan hal ini sebelumnya.

Andaikan $y = f(x)$, seperti diperlihatkan dalam Gambar 3. Bilamana $x$ diberikan tambahan $\Delta x$, maka $y$ menerima tambahan yang berpadanan $\Delta y$, yang dapat dihampiri oleh $dy$. Jadi, $f(x + \Delta x)$ diaproksimasi oleh

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

Ini merupakan dasar untuk semua contoh yang menyusul.

CONTOH 2 Andaikan anda memerlukan aproksimasi yang baik terhadap $\sqrt{4,6}$ dan $\sqrt{8,2}$, tetapi kalkulator anda rusak. Apa yang mungkin anda kerjakan?

***Penyelesaian*** Pandang grafik dari $y = \sqrt{x}$ yang disketsakan dalam Gambar 4. Bilamana $x$ berubah dari 4 ke 4,6 maka $\sqrt{x}$ berubah dari $\sqrt{4} = 2$ ke $\sqrt{4} + dy$ (secara aproksimasi). Sekarang

$$dy = \frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

sedangkan di $x = 4$ dan $dx = 0,6$ mempunyai nilai

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{4}}(0,6) = \frac{0,6}{4} = 0,15$$

Jadi

$$\sqrt{4,6} \approx \sqrt{4} + dy = 2 + 0,15 = 2,15$$

Serupa, di $x = 9$ dan $dx = -0,8$;

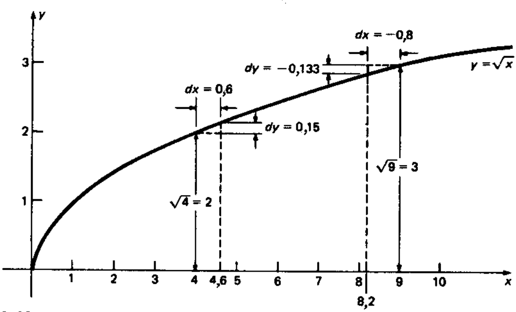
$$dy = \frac{1}{2\sqrt{9}}(-0,8) = \frac{-0,8}{6} = -0,133$$

Karena itu

$$\sqrt{8,2} \approx \sqrt{9} + dy = 3 - 0,133 = 2,867$$

Perhatikan bahwa $dx$ dan $dy$ dua-duanya negatif dalam kasus ini.

Nilai-nilai aproksimasi 2,15 dan 2,867 boleh dibandingkan terhadap nilai-nilai sebenarnya (sampai empat angka desimal): 2,1448 dan 2,8636.




GAMBAR 4 ■

**CONTOH 3** Gunakan diferensial untuk mengaproksimasi pertambahan luas sebuah gelembung sabun pada saat jari-jarinya bertambah dari 3 cm menjadi 3,025 cm.

***Penyelesaian*** Luas gelembung bola sabun diberikan oleh $A = 4\pi r^2$. Kita boleh mengaproksimasi nilai sebenarnya, $\Delta A$ dengan diferensial $dA$, di mana

$$dA = 8\pi r\, dr$$

Pada $r = 3$ dan $dr = \Delta r = 0{,}025$,

$$dA = 8\pi(3)(0{,}025) \approx 1{,}885 \text{ cm}$$ ■

**PENAKSIRAN KESALAHAN (ERROR)** Berikut adalah masalah khas dalam sains. Seorang peneliti mengukur variabel $x$ tertentu yang bernilai $x_0$ dengan kesalahan yang mungkin berukuran $\pm\Delta x$. Nilai $x_0$ kemudian dipakai menghitung nilai $y_0$ untuk $y$ yang tergantung pada $x$. Nilai $y_0$ tercemar oleh kesalahan dalam $x$, tetapi seberapa buruk? Prosedur standar adalah menaksir kesalahan ini dengan memakai sarana diferensial.

**CONTOH 4** Rusuk kubus diukur dengan panjang 11,4 cm dengan kemungkinan kesalahan $\pm 0{,}05$ cm. Hitung volume kubus dan berikan suatu taksiran kesalahan dalam nilai ini.

***Penyelesaian*** Volume kubus $V$ yang rusuknya $x$ adalah $V = x^3$. Jadi $dV = 3x^2\, dx$. Jika $x = 11{,}4$ dan $dx = 0{,}05$, maka $V = (11{,}4)^3 \approx 1482$ dan

$$dV = 3(11{,}4)^2(0{,}05) \approx 19.$$

Jadi, kita dapat melaporkan volume kubus sebagai $1482 \pm 19$ cm$^3$. ■

**CONTOH 5** Diketahui bahwa $y = 3 \sin 2t + 4 \cos^2 t$. Jika $t$ diukur sebagai $1{,}13 \pm 0{,}005$, hitung $y$ dan berikan taksiran untuk kesalahan.

***Penyelesaian***

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin(2)(1{,}13) + 4 \cos^2(1{,}13) \approx 3{,}043 \\ dy &= [(3)(2)\cos 2t - (4)(2)\cos t \sin t]\, dt \\ &= [6 \cos(2)(1{,}13) - 8 \cos(1{,}13)\sin(1{,}13)](0{,}005) \\ &\approx -0{,}035 \end{aligned}$$

Jadi, $y = 3{,}043 \pm 0{,}035$ ■

## SOAL-SOAL 3.10

Dalam Soal-soal 1-6, cari $dy$.

1. $y = 2x^2 - 3x + 5$
2. $y = 7x^3 - 3x^2 + 4$
3. $y = (3 + 2x^3)^{-4}$
4. $y = \dfrac{13x}{5x^2 + 2}$
5. $y = \sqrt{4x^5 + 2x^4 - 5}$
6. $y = (6x^8 - 11x^5 + x^2)^{-2/3}$

7. Jika $s = \sqrt[5]{(t^2 - 3)^2}$, cari $ds$.

8. Jika $F(x) = (5x^2 + 1)^2(x - 7)^5$, cari $dF$.

9. Andaikan $y = f(x) = x^3$. Cari nilai $dy$ dalam tiap kasus.
(a) $x = 0{,}5$, $dx = 1$ (b) $x = -1$, $dx = 0{,}75$
Buatlah sebuah gambar yang seksama dari grafik $f$ untuk $-1{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ dan garis singgung-garis singgung pada kurva di $x = 0{,}5$ dan $x = -1$; pada gambar ini bu-

buhkan $dy$ dan $dx$ untuk setiap pasangan data yang diketahui dalam (a) dan (b).

10. Andaikan $y = 1/x$. Cari nilai $dy$ dalam setiap kasus.
(a) $x = 1, dx = 0,5$ (b) $x = -2, dx = 0,75$
Buat sebuah gambar skala besar, seperti dalam Soal 9, untuk $-3 \leqslant x < 0$ dan $0 < x \leqslant 3$.

$\boxed{C}$ 11. Untuk data dalam Soal 9, cari perubahan yang sebenarnya dalam $y$, yakni $\Delta y$

$\boxed{C}$ 12. Untuk data dalam Soal 10, cari perubahan dalam $y$, yakni $\Delta y$.

13. Jika $y = x^2 - 3$, cari nilai-nilai $y$ dan $dy$ dalam setiap kasus.

(a) $x = 2$ dan $dx = \Delta x = 0,5$
$\boxed{C}$ (b) $x = 3$ dan $dx = \Delta x = -0,12$

14. Jika $y = x^4 + 2x$, cari nilai-nilai $\Delta y$ dan $dy$ dalam setiap kasus.
(a) $x = 2$ dan $dx = \Delta x = 1$
$\boxed{C}$ (b) $x = 2$ dan $dx = \Delta x = 0,005$

Dalam Soal-soal 15-18, gunakan diferensial untuk mengaproksimasi bilangan yang diberikan (lihat Contoh 2). Bandingkan dengan nilai-nilai kalkulator.

15. $\sqrt{402}$ 16. $\sqrt{35,9}$
17. $\sqrt[3]{26,91}$ 18. $\sqrt[6]{64,05}$

$\boxed{C}$ 19. Aproksimasi nilai volume material dalam tempurung bola yang jari-jari dalamnya 5 cm dan jari-jari luarnya 5,125 cm (lihat Contoh 3). $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\boxed{C}$ 20. Semua sisi kotak baja berbentuk kubus tebalnya 0,25 inci, dan volume kotak sebelah dalam adalah 40 inci kubik. Gunakan diferensial untuk mencari aproksimasi volume baja yang digunakan membuat kotak itu.

21. Garis tengah luar sebuah tempurung bola tipis adalah 12 dm. Jika tebal tempurung 0,3 dm, gunakan diferensial untuk mengaproksimasi volume daerah sebelah dalam tempurung.

22. Bagian dalam sebuah tangki berbentuk tabung terbuka mempunyai garis tengah 12 kaki dan kedalaman 8 kaki. Alasnya terbuat dari tembaga dan sisinya dari baja. Gunakan diferensial untuk secara aproksimasi menaksir berapa galon cat tahan air yang diperlukan untuk melapis setebal 0,05 inci bagian baja dari bagian dalam tangki (1 galon $\approx$ 231 inci kubik).

23. Dengan anggapan bahwa katulistiwa berbentuk lingkaran yang jari-jarinya kira-kira 4000 mil, seberapakah akan lebih panjang dari katulistiwa sebuah lingkaran lain yang sebidang dan sepusat, jika setiap titiknya berada 2 kaki di atas katulistiwa? Gunakan diferensial.

24. Periode sebuah pendulum sederhana yang panjangnya $L$ kaki diberikan oleh $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ detik. Kita anggap bahwa $g$, percepatan yang diakibatkan oleh gravitasi pada (atau sangat dekat) permukaan bumi adalah 32 kaki tiap detik. Jika pendulum itu adalah pada lonceng yang waktunya tepat pada saat $L = 4$ kaki, seberapa jalannya jam lebih cepat dalam 24 jam apabila panjang pendulum diperpendek menjadi 3,97 kaki?

25. Garis tengah sebuah bola diukur sebagai $20 \pm 0,1$ cm. Hitung volumenya dengan suatu taksiran untuk kesalahan (lihat Contoh 4 dan 5).

26. Penggiling berbentuk tabung panjangnya tepat 12 inci dan garis tengahnya diukur sebagai $6 \pm 0,005$ inci. Hitung volumenya dengan suatu taksiran untuk kesalahan.

$\boxed{C}$ 27. Sudut antara dua sisi yang sama dari sebuah segitiga sama kaki diukur $0,53 \pm 0,005$ radian. Kedua sisi yang sama itu panjangnya tepat 151 cm. Hitung panjang sisi yang ketiga dengan suatu taksiran untuk kesalahan.

$\boxed{C}$ 28. Hitung luas segitiga dari Soal 27 dengan suatu taksiran untuk kesalahan. *Petunjuk:* $A = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

29. Dapat diperlihatkan bahwa jika $|d^2y/dx^2| \leqslant M$ pada suatu selang tertutup dengan $c$ dan $c + \Delta x$ sebagai titik-titik ujung, maka

$$|\Delta y - dy| \leq \tfrac{1}{2}M(\Delta x)^2$$

Carilah dengan menggunakan diferensial, perubahan dalam $y = 3x^2 - 2x + 11$ pada saat $x$ bertambah dari 2 ke 2,001 dan kemudian berikan sebuah batas untuk kesalahan yang anda buat dengan memakai diferensial.

30. Tentukanlah nilai dari $f(0{,}02)$ apabila

$$f(x) = \sin[\sin(\sin 2x)]/\cos(\sin x).$$

31. Sebuah tangki berbentuk silinder dengan ujung-ujungnya berupa setengah bola. Apabila bagian yang berbentuk silinder panjangnya 100 cm dan jari-jarinya 10 cm, kira-kira berapa banyak cat-kah yang diperlukan untuk melapisi bagian luar tangki dengan ketebalan 1 milimeter?

32. Sebuah piala berbentuk kerucut dengan tinggi 10 cm dan lebarnya 8 cm di bagian atas, diisi air sampai kedalaman 9 cm. Sebongkah es berbentuk kubus dengan itu. Pergunakanlah diferensial untuk menentukan apakah air dalam piala akan meluap.

## 3.11 Soal-Soal Ulangan Bab

### KUIS BENAR-SALAH

Jawablah dengan benar atau salah setiap pernyataan berikut. Bersiaplah untuk mempertahankan jawaban anda.

1. Garis singgung pada kurva di suatu titik tidak dapat memotong kurva pada titik itu.
2. Kemiringan garis singgung pada kurva $y = x^4$ berlainan pada setiap titik dari kurva.
3. Adalah mungkin bahwa kecepatan sebuah benda bertambah sementara lajunya berkurang.
4. Jika garis singgung pada grafik dari $y = f(x)$ adalah mendatar pada $x = c$, maka $f'(c) = 0$.
5. Jika $f'(x) = g'(x)$ untuk semua $x$, maka $f(x) = g(x)$ untuk semua $x$.
6. Jika $y = \pi^5$, maka $D_x y = 5\pi^4$.
7. Jika $f'(c)$ ada, maka $f$ kontinu di $c$.
8. Grafik dari $y = \sqrt[3]{x}$ mempunyai sebuah garis singgung di $x = 0$ dan $D_x y$ tetap tidak ada di sana.
9. Turunan suatu hasilkali adalah hasilkali turunan-turunan.
10. Jika percepatan sebuah benda negatif, maka kecepatannya berkurang.
11. Jika $x^3$ adalah suatu faktor dari fungsi $f(x)$ yang terdiferensialkan, maka $x^2$ adalah suatu faktor dari turunannya.
12. Persamaan garis singgung pada grafik dari $y = x^3$ pada $(1,1)$ adalah $y - 1 = 3x^2(x - 1)$.
13. Jika $y = f(x)g(x)$, maka $D_x^2 y = f(x)g''(x) + g(x)f''(x)$.
14. Jika $y = (x^3 + x)^8$, maka $D_x^{25} y = 0$
15. Turunan polinom adalah polinom.
16. Turunan fungsi rasional adalah fungsi rasional.
17. Jika $f'(c) = g'(c) = 0$ dan $h(x) = f(x)g(x)$, maka $h'(c) = 0$.
18. Ungkapan

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\sin x - 1}{x - \pi/2}$$

adalah turunan $f(x) = \sin x$ di $x = \pi/2$.

19. Operator $D^2$ adalah linear.
20. Jika $h(x) = f(g(x))$ di mana $f$ dan $g$ dua-duanya terdiferensial, maka $g'(c) = 0$ membawakan $h'(c) = 0$.
21. Jika $f'(2) = g'(2) = g(2) = 2$, maka $(f \circ g)'(2) = 4$.

22. Jika $f$ terdiferensial dan naik dan jika $dx = \Delta x > 0$, maka $\Delta y > dy$.

23. Jika jari-jari sebuah lingkaran bertambah pada 3 kaki/detik, maka volumenya bertambah pada 27 kaki kubik tiap detik.

24. $D_x^{n+4}(\sin x) = D_x^n(\sin x)$ untuk setiap bilangan bulat positif $n$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{3x} = \dfrac{1}{3}$.

26. Jika $s = 5t^3 + 6t - 300$ memberikan posisi sebuah benda pada garis koordinat mendatar pada saat $t$, maka benda itu selalu bergerak ke kanan (ke arah pertambahan $s$).

27. Jika udara dipompa ke dalam balon bundar dari karet pada laju tetap sebesar 3 inci kubik tiap detik, maka jari-jarinya akan bertambah tetapi dengan laju yang makin lama makin lambat.

28. Jika air dipompa ke dalam tangki bundar yang jari-jarinya tetap pada laju 3 galon/detik, ketinggian air dalam tangki akan bertambah makin lama makin cepat dengan semakin hampir penuhnya tangki.

29. Jika galat $\Delta r$ dibuat dalam pengukuran jari-jari sebuah bola, maka kesalahan yang berpadanan dalam volume yang terhitung kira-kira akan sebesar $S \cdot \Delta r$ di mana $S$ adalah luas permukaan bola.

30. Jika $y = x^5$, maka $dy \geqslant 0$.

## SOAL-SOAL ANEKA RAGAM

1. Gunakan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}[f(x + h) - f(x)]/h$ untuk mencari turunan dari setiap yang berikut ini.

(a) $f(x) = x^2 - 5x$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

(c) $f(x) = \sqrt{9 - x}$

2. Gunakan $g'(x) = \lim\limits_{t \to x} \dfrac{g(t) - g(x)}{t - x}$ untuk mencari $g'(x)$ dalam tiap kasus.

(a) $g(x) = x^3$

(b) $g(x) = \sqrt{x}$

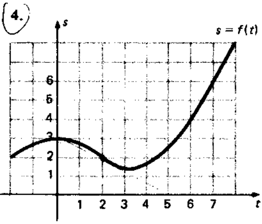
3. Limit yang diberikan adalah suatu turunan, tetapi dari fungsi $f$ mana dan pada titik mana?

(a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(2 + h)^2 - 3(2)^2}{h}$

(b) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\tan(\pi/4 + \Delta x) - 1}{\Delta x}$

(c) $\lim\limits_{p \to x} \dfrac{3/p - 3/x}{p - x}$

4.




Gunakan sketsa dalam gambar untuk mengaproksimasi setiap yang berikut.

(a) $f'(2)$ (b) $f'(6)$

(c) $v_{\text{rata-rata}}$ pada $[3,7]$. (d) $\dfrac{d}{dt} f(t^2)$ di $t = 2$

(e) $\dfrac{d}{dt}[f^2(t)]$ di $t = 2$

Dalam Soal-soal 5-14, cari tiap turunan dengan memakai aturan yang telah kita kembangkan.

5. $D_x(x^3 - 3x^2 + x^{-2})$

6. $D_x\left(\dfrac{3x - 5}{x^2 + 1}\right)$

7. $D_x^2(3x+2)^{2/3}$

8. $D_t(t\sqrt{2t+6})$

9. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)$

10. $\frac{d}{dt}[\sin(t^2) - \sin^2(t)]$

11. $\frac{d}{dx}(\cos^3 5x)$

12. $\frac{d}{dt}[\sin^2(\cos 4t)]$

13. $f'(2)$ jika $f(x) = (x^2-1)^2(3x^3-4x)$

14. $g''(0)$ jika $g(x) = \sin 3x + \sin^2 3x$

15. Cari koordinat-koordinat titik pada kurva $y = (x-2)^2$ pada mana garis singgung tegak lurus pada garis $2x - y + 2 = 0$.

16. Sebuah balon bundar memuai akibat panas matahari. Cari laju perubahan volume balon terhadap jari-jarinya pada saat jari-jari 5 meter.

17. Gunakan diferensial untuk menghampiri perubahan dalam volume balon dari Soal 16 pada saat jari-jari bertambah dari 5 ke 5,1 meter.

18. Jika volume balon dari Soal 16 bertambah pada laju tetap sebesar 10 meter kubik tiap jam, seberapa cepat jari-jarinya bertambah pada saat jari-jari 5 meter?

19. Palung panjang 12 kaki mempunyai irisan berupa segitiga samakaki dengan dalam 4 kaki dan jarak lintas 6 kaki pada puncak. Jika air diisikan ke palung pada laju 9 kaki kubik tiap menit, seberapa cepat permukaan air naik pada saat kedalaman air 3 kaki?

20. Sebuah benda diluncurkan langsung ke atas dari tanah dengan kecepatan awal 128 kaki/detik. Ketinggian $s$ setelah $t$ detik kira-kira $s = 128t - 16t^2$ kaki.
(a) Kapan ia mencapai ketinggian maksimum dan berapa tinggi ini?
(b) Kapan ia membentur tanah dan dengan kecepatan berapa?

21. Sebuah benda bergerak pada garis koordinat mendatar. Jarak berarah $s$ dari titik asal setelah $t$ detik adalah $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ kaki.
(a) Kapan benda bergerak ke kiri?
(b) Berapa percepatannya pada saat kecepatan nol?
(c) Kapan percepatannya positif?

22. Cari $D_x^{20}y$ dalam tiap kasus.
(a) $y = 13x^{19} - 2x^{12} - 6x^5 + 18$
(b) $y = \frac{1}{x}$

23. Cari $dy/dx$ dalam tiap kasus.
(a) $x^3 + y^3 = x^3y^3$
(b) $x\sin(xy) = x^2 + 1$

24. Perlihatkan bahwa garis singgung pada kurva $y^2 = 4x^3$ dan $2x^2 + 3y^2 = 14$ di $(1, 2)$ saling tegak lurus. *Petunjuk:* Gunakan pendiferensialan implisit.

25. Andaikan $y = \sin(\pi x) + x^2$. Jika $x$ berubah dari 2 ke 2,01, kira-kira berapa banyak $y$ berubah?

26. Andaikan $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = -1$, $g(2) = 2$, dan $g'(2) = 5$. Cari tiap nilai.
(a) $\frac{d}{dx}[f^2(x) + g^3(x)]$ di $x = 2$
(b) $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ di $x = 2$
(c) $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$ di $x = 2$
(d) $D_x^2[f^2(x)]$ di $x = 2$

27. Sebuah tangga yang panjangnya 13 kaki bersandar pada dinding tegak. Jika alas tangga ditarik sepanjang tanah dengan laju tetap sebesar 2 kaki/detik, seberapa cepat ujung atas tangga bergerak turun pada dinding di saat ia berada 5 kaki di atas tanah?

28. Sebuah pesawat udara mengudara pada sudut 15° terhadap arah mendatar. Seberapa cepat ketinggiannya bertambah jika lajunya adalah 400 mil/jam?

29. Diberikan bahwa $D_x|x| = |x|/x$, $x \neq 0$, cari rumus untuk $D_x|\sin x|$.