EDISI KELIMA

KALKULUS
dan Geometri Analitis

Jilid 1

Edwin J. Purcell · Dale Varberg

1600

1700

Archimedes

287-212 B.C.

Descartes

Newton

Leibniz

Euler

Lagrange

— *J. Kepler (1571-1630)*

— *R. Descartes (1596-1650)*

— *B. Pascal (1623-1662)*

— *I. Newton (1642-1727)*

— *G. Leibniz (1646-1716)*

— *L'Hôpital (1661-1704)*

— *J. Bernoulli (1667-1748)*

— *L. Euler (1707-1783)*

— *M. Agnesi (1718-1799)*

— *J. Lagrange (1736-1813)*

— *C.*

Kepler

Pascal

L'Hôpital

Bernoulli

Agnesi

[Kalkulus adalah] hasil perjuangan intelektual yang dramatik yang berlangsung selama dua ribu lima ratus tahun

Richard Courant

1609 — Hukum Kepler tentang gerak planet

1637 — Geometri Analitik Descartes

1665 — Newton menemukan kalkulus

1696 — Buku teks pertama tentang kalkulus (L'Hôpital)

1728 — Euler memperkenalkan bilangan *e*

1756 — Lagrange memulai penulisan Mécanique analitique

Gauss ... Teorem...

1800

1900

PENYUMBANG-PENYUMBANG LAIN

Pierre de Fermat (1601-1665)
Michel Rolle (1652-1719)
Brook Taylor (1685-1731)
Colin Maclaurin (1698-1746)
Thomas Simpson (1710-1761)
Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)
George Green (1793-1841)
George Gabriel Stokes (1891-1903)

Lagrange

Gauss

Cauchy

Riemann

Lebesgue

18-1799)

J. Lagrange (1736-1813)

— *C. Gauss (1777-1855)*

— *A. Cauchy (1789-1857)*

— *K. Weierstrass (1815-1897)*

— *G. Riemann (1826-1866)*

— *J. Gibbs (1839-1903)*

— *S. Kovalevsky (1850-1891)*

— *H. Lebesgue (1875-1941)*

Agnesi

Weierstrass

Kovalevsky

Gibbs

1756 — Lagrange memulai penulisan Mécanique analitique

1799 — Gauss membuktikan Teorema Dasar Aljabar

1821 — Gagasan yang teliti tentang limit (Cauchy)

1854 — Integral Riemann

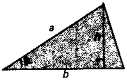
1873 — *e* itu transcendental (Hermite)

1902 — Integral Lebesgue

al-

RUMUS-RUMUS GEOMETRI

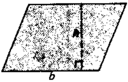
Segitiga



Luas $= \frac{1}{2}bh$

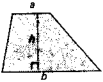
Luas $= \frac{1}{2}ab \sin\theta$

Jajaran genjang



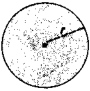
Luas $= bh$

Trapesium



Luas $= \frac{a+b}{2}h$

Lingkaran



Keliling $= 2\pi r$

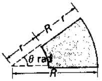
Luas $= \pi r^2$

Sektor Lingkaran

Panjang busur $s = r\theta$

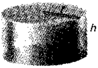
Luas $= \frac{1}{2}r^2\theta$

Persegi panjang Kutub



Luas $= \frac{R+r}{2}(R-r)\theta$

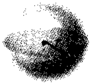
Silinder Tegak



Luas dinding $= 2\pi rh$

Volume $= \pi r^2 h$

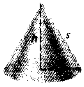
Bola



Luas $= 4\pi r^2$

Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Kerucut Tegak



Luas kulit $= \pi rs$

Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

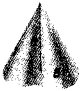
Kerucut Tegak Terpancung

Luas kulit $= \pi s(r+R)$

Volume $=$

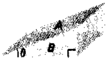
$\frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h$

Kerucut Sembarang



Volume $= \frac{1}{3}$ (luas B)h

Baji



Luas $A =$ (luas B) sec θ

Kalkulus dan Geometri Analitis

Jilid I

Kalkulus dan Geometri Analitis

Jilid I

EDISI KELIMA

1994
PENERBIT ERLANGGA **Jl. H. Baping Raya No. 100 Ciracas, Jakarta 13740**
(Anggota IKAPI)

Edwin J. Purcell
University of Arizona

Dale Varberg
Hamline University

Alih Bahasa:
Drs. I Nyoman Susila, M. Sc.
Bana Kartasasmita Ph.D dan Drs. Rawuh
Institut Teknologi Bandung

Judul Asli: *Calculus with Analytic Geometry, 5th Edition*

Alih Bahasa : **Drs. I Nyoman Susila, M.Sc.**
Bana Kartasasmita, Ph.D
Drs. Rawuh
Departemen Matematika
Institut Teknologi Bandung (ITB).

Buku ini diset dan dilayout oleh bagian produksi ***Penerbit Erlangga*** dengan huruf PR-10-M.

Korektor : **Fernando Pasaribu**
Dicetak oleh : **PT. Gelora Aksara Pratama**

Cetakan pertama, 1992
Cetakan kedua, 1993
Cetakan ketiga, 1994

Daftar Isi

Kata Pengantar

Kami percaya bahwa para pengajar dan mahasiswa yang telah menikmati edisi terdahulu, akan lebih menyukai revisi yang terbaru ini, karena beberapa bagian telah kami sempurnakan, hal-hal yang sulit diperjelas penyampaiannya dan beberapa kesalahan telah diperbaiki. Baik susunan maupun penampilannya secara umum hampir sama dengan edisi ke empat, sebagian besar perubahan yang dilakukan terutama adalah penambahan **lebih kurang 600 soal-soal baru**. Penulis telah meneliti literatur, mencari soal-soal yang bagus terutama dalam dua tipe yaitu soal-soal terapan dan soal-soal yang menantang. Dua sampai sepuluh soal-soal terapan dan soal-soal yang menantang. Dua sampai sepuluh soal seperti ini telah kami tambahkan pada setiap kelompok soal dan biasanya kami tempatkan pada bagian akhir (di mana dalam beberapa hal, kelompok soal itu kami olah kembali secara menyeluruh agar lebih selaras). Kami yakin bahwa kelompok-kelompok soal tersebut akan dapat memberikan pengalaman belajar tersendiri bagi Anda, dimulai dengan mengerjakan sejumlah soal-soal praktis, diikuti dengan beberapa soal terapan dan diakhiri dengan soal-soal yang membuat penasaran, sekalipun kepada pakar matematika yang sedang naik daun.

Bagi yang belum pernah mempergunakan buku kami sebelumnya, dapat kami sebutkan bahwa ada beberapa segi yang telah menunjang suksesnya edisi-edisi sebelumnya. Pertama, buku ini dipenuhi dengan matematika bermutu yang disajikan secara gamblang, tidak berbelit-belit. Ini adalah buku menengah, **tidak terlalu berat dan tetap berpegang pada pola pikir materi yang disampaikan**. Kami tahu bahwa sebagian besar pemanfaatan buku ini adalah para ilmuwan dan insinyur, oleh karenanya buku ini diharapkan akan dapat pula memberikan dasar-dasar pokok matematika yang cukup.

Kedua, buku ini **modern dalam semangat berpikir tanpa menjadi pelupa**. Sebagai contoh, kami anggap bahwa Anda memiliki kalkulator elektronik, dan kami sediakan soal-soal dengan tanda $\boxed{c}$ yang dapat diselesaikan dengan menggunakan kalkulator. Dan satu hal lagi yang lebih menarik adalah kami berikan satu bab penuh (Bab 10) mengenai **kalkulus numerik**, menjelaskan secara rinci hal-hal yang cocok untuk perhitungan komputer (akan tetapi, masih dapat dikerjakan dengan kalkulator). Kami kira ulasan kami mengenai turunan berdimensi-*n* (Bab 15) cukup jelas dan mutakhir. Bentuk-bentuk ini merupakan dasar untuk pembahasan lebih lanjut tentang **kalkulus vektor** (Bab 17), termasuk teorema-teorema Green, Gauss, dan Stokes. Pembahasan kami tentang **teori maksimum-minimum** amat bermanfaat sebagai kelengkapan dan untuk mengaitkan besaran-besaran berdimensi satu (Bab 4) dengan besaran berdimensi-*n* (Bab 15). Dan tidak lupa kami sajikan pula satu bagian khusus mengenai metode Lagrange.

Ketiga, kami bermaksud untuk **menyampaikan ilmu sebaik-baiknya tanpa terasa menjemukan**. Sebagai contoh, kami anjurkan agar Anda melihat sajian kami pada **pendahuluan limit** (Bab 2), bagaimana konsistensi kami dalam menerapkan suatu teknik (**memilah, menduga, mengintegrasi**) dalam menunjukkan bagaimana integral muncul dalam penerapannya (lihat, sebagai contoh, pada halaman 313, 348), dan penekanan kami pada konsep **linearan** di seluruh pembahasan. Kami yakin, Anda akan menyukai **diagram waktu** historis di bagian dalam sampul muka, **riwayat-riwayat hidup** para pakar di setiap awal bab, **kotak-kotak catatan pinggir** (baru dalam edisi ini) sebagai bahan arahan, dan **diagram ringkasan** di Bagian A.3 pada lampiran. Pada setiap buku, ada **kartu rumus** yang dapat digunting dari buku ini, untuk dapat dibawa ke mana saja dalam saku. Para pengajar tentunya akan sependapat bahwa alat pembantu belajar yang baik bagi setiap buku kalkulus adalah **kelompok-kelompok soal**-nya. Untuk ini, kami telah berusaha menyusun sebaik-baiknya dalam buku ini agar lebih dapat diminati. Selain itu, kami berikan juga **soal ulangan pada tiap bab** yang terdiri dari pertanyaan-pertanyaan benar-salah dengan maksud untuk mengevaluasi penguasaan teori kalkulus Anda, dan soal uji-petik (sample test problems) yang mungkin dapat dipergunakan oleh para pengajar untuk memberikan ujian.

Pada kesempatan ini, dengan senang hati kami sampaikan penghargaan atas kritik yang membangun dan bantuan saran-saran dari para pengulas di sini. Rekan-rekan penulis muda dari Hamline University (Gary Anderson, Kay Blair, Walter Fleming, Wojciech Komornicki, Nadine Myers) yang telah banyak membantu. Prentice-Hall yang telah berbaik hati menyelenggarakan konferensi para pengulas selama dua hari penuh menganalisis buku ini halaman demi halaman dan yang berpartisipasi dalam hal ini adalah:

Wilson Banks, Illinois State University,
Richard Grassl, University of New Mexico,
Louis Guillou, St. Mary's College,
Paul Liebnitz, University of Missouri, Kansas City,
Wayne Roberts, Macalester College,
Robert Sickles, Prentice Hall, Inc.

Louis Guillou banyak memberikan saran, menyusun soal-soal baru dan menyiapkan panduan untuk siswa dan untuk para guru. Wayne Roberts membuat komentar-komentar secara rinci pada keseluruhan naskah; dia dan Kay Blair membantu mengoreksi pemberian halaman dan nomor-nomor gambar. Sedangkan rekan lainnya yang telah membaca dan mengomentari sebagian dari naskah ini adalah:

Gene Brown, Northern Virginia Community College
James H. Fife, The University of Richmond
John Spellman, Southwest Texas State University
Paul Weichsel, The University of Illinois
Eugene Wingo, Thomas Nelson Community College

Kami ucapkan terima kasih pula kepada Norton Starr, dari Amherst College yang telah memberikan grafik-grafik komputer untuk Bab 15 dan C. H. Edwards Jr. serta David F. Penney dari University of Georgia yang telah mengizinkan untuk menggunakan Daftar Integral dari bukunya, *Calculus and Analitic Geometry*, Prentice Hall, 1982.

Akhirnya, dengan segala kerendahan hati kami ucapkan terima kasih pula kepada seluruh staf Prentice Hall atas dorongan, bantuan dan hasil kerjanya yang profesional, terutama kepada Robert Sickles (Editor Eksekutif), David Ostrow (Editor Matematika), Zita de Schauensee (Editor Proyek) dan Jayne Conte (Perancang).

Edwin J. Purcell
Dale Varberg

1 Pendahuluan

[Geometri koordinat], jauh melebihi dari spekulasi metafisisnya, mengabdikan nama Descartes, dan merupakan langkah tunggal terbesar yang pernah dibuat dalam perkembangan ilmu-ilmu eksakta.
John Stuart Mill

René Descartes
1596–1650

Rene Descartes dikenal sebagai ahli filsafat modern pertama yang besar. Ia juga penemu biologi modern, ahli fisika, dan matematikawan.

Descrates lahir di Touraine, Perancis, putra dari seorang ahli hukum, yang lumayan kekayaannya. Ayahnya mengirimnya ke sekolah Jesuit pada umur delapan tahun. Karena kesehatannya yang kurang baik, Descartes diijinkan menghabiskan waktu paginya belajar di tempat tidur, suatu kebiasaan yang dipandangnya berguna sehingga dilanjutkannya sepanjang hidupnya. Pada umur 20 tahun, ia mendapat gelar sarjana hukum (dapat anda bayangkan seorang SH yang juga ahli matematik?) dan selanjutnya menjalani kehidupan seorang tuan yang terhormat, menjalani dinas militer beberapa tahun dan tinggal beberapa waktu di Paris dan kemudian di Belanda. Ia pergi ke Swedia diundang untuk mengajari Ratu Christina, di mana ia meninggal karena pneumonia pada tahun 1650.

Descartes menyelidiki suatu metode berpikir yang umum yang akan memberikan pertalian pada pengetahuan dan menuju kebenaran dalam ilmu-ilmu. Penyelidikan itu mengantarnya ke matematika, yang ia simpulkan sebagai sarana pengembangan kebenaran di segala bidang. Karya matematikanya yang paling berpengaruh adalah *La Geometrie*, yang diterbitkan tahun 1637. Di dalamnya, ia mencoba suatu penggabungan dari *geometri* tua dan patut dimuliakan dengan *aljabar* yang masih bayi. Bersama dengan orang Perancis lainnya, Pierre Fermat (1601–1665), ia diberi pujian dengan gabungan tersebut yang saat ini kita sebut geometri analitik, atau geometri koordinat. Pengembangan lengkap kalkulus tidak mungkin tercapai tanpa dia.

1.1 Sistem Bilangan Riil

Kalkulus didasarkan pada sistem bilangan riil dan sifat-sifatnya. Tetapi apakah bilangan riil itu dan apa sifat-sifatnya? Untuk menjawab, kita mulai dengan beberapa sistem bilangan yang lebih sederhana.

BILANGAN-BILANGAN BULAT DAN RASIONAL Di antara sistem bilangan, yang paling sederhana adalah **bilangan-bilangan asli,**

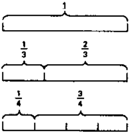
$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Dengan bilangan ini kita dapat *menghitung:* buku-buku kita, teman-teman kita, dan uang kita. Jika kita gandengkan negatifnya dengan nol, kita peroleh **bilangan-bilangan bulat:**

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Bilamana kita mencoba *mengukur* panjang, berat atau tegangan listrik, bilangan-bilangan bulat tidak memadai. Bilangan ini terlalu kurang untuk memberikan ketelitian yang cukup. Kita dituntun untuk juga mempertimbangkan hasil bagi (rasio) dari bilangan-bilangan bulat (Gambar 1) yaitu bilangan-bilangan seperti

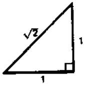
$$\frac{3}{4}, \frac{-7}{8}, \frac{21}{5}, \frac{19}{-2}, \frac{16}{2}, \text{dan } \frac{-17}{1}$$



GAMBAR 1

GAMBAR 2

Perhatikan bahwa kita menyertakan $\frac{16}{2}$ dan $\frac{-17}{1}$, walaupun secara normal kita menuliskannya sebagai 8 dan -17, karena sesuai dengan arti pembagian yang biasa mereka sama dengan yang belakangan. Kita tidak menyertakan $\frac{5}{0}$ atau $\frac{-9}{0}$, karena tidak mungkin membuat pengertian dari lambang-lambang ini (lihat Soal 36). Marilah kita bersepakat untuk seterusnya membuang pembagian oleh nol dari buku ini (Gambar 2). Bilangan-bilangan yang dapat dituliskan dalam bentuk m/n, di mana m dan n adalah bilangan-bilangan bulat dengan $n \neq 0$, disebut **bilangan-bilangan rasional.**

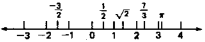


GAMBAR 3

Apakah bilangan-bilangan rasional berfungsi mengukur semua panjang? Tidak. Fakta yang mengejutkan ini ditemukan oleh orang Yunani kuno beberapa abad sebelum Masehi. Mereka memperlihatkan bahwa meskipun $\sqrt{2}$ merupakan panjang sisi-miring sebuah segitiga siku-siku dengan sisi-sisi 1 (Gambar 3), bilangan ini tidak dapat dituliskan sebagai suatu hasil bagi dari dua bilangan bulat (lihat Soal 43). Jadi $\sqrt{2}$ adalah suatu bilangan tak-rasional. Demikian juga $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{7}, \pi$, dan sekelompok bilangan lain.

BILANGAN-BILANGAN RIIL Sekumpulan bilangan (rasional dan tak-rasional) yang dapat mengukur panjang, bersama-sama dengan negatifnya dan nol kita namakan **bilangan-bilangan riil.**

Bilangan-bilangan riil dapat dipandang sebagai pengenal (label) untuk titik-titik sepanjang sebuah garis mendatar. Di sana bilangan-bilangan ini mengukur jarak ke kanan atau ke kiri (jarak berarah) dari suatu titik tetap yang disebut titik asal dan diberi label 0 (Gambar 4). Walaupun kita tidak mungkin memperlihatkan semua label itu, tiap titik memang mempunyai sebuah label tunggal bilangan riil. Bilangan ini disebut **koordinat** titik tersebut. Dan garis koordinat yang dihasilkan diacu sebagai **garis riil.**

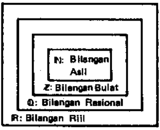


GAMBAR 4

Terdapat lambang-lambang baku untuk mengenali kelas-kelas bilangan yang sejauh ini telah dibahas. Mulai sekarang, $\mathbb{N}$ akan menyatakan himpunan bilangan asli (bilangan bulat positif), $\mathbb{Z}$ (dari bahasa Jerman, *Zahlen*) akan menyatakan himpunan bilangan bulat, $\mathbb{Q}$ (hasil bagi bilangan bulat) menyatakan himpunan bilangan rasional, dan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan riil. Seperti ditunjukkan pada Gambar 5,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Di sini $\subset$ adalah lambang himpunan bagian; dibaca "adalah himpunan bagian dari".



GAMBAR 5

Hampir semua mahasiswa akan ingat bahwa sistem bilangan masih dapat diperluas lebih jauh lagi ke bilangan yang disebut **bilangan kompleks**. Bilangan-bilangan ini berbentuk $a + b\sqrt{-1}$, di mana a dan b adalah bilangan-bilangan riil. Bilangan-bilangan kompleks akan jarang dipakai dalam buku ini. Kenyataannya, jika kita mengatakan *bilangan* tanpa penjelasan khusus, anda dapat menganggap bahwa yang dimaksudkan adalah bilangan riil. Bilangan-bilangan riil merupakan ciri utama dalam kalkulus.

EMPAT OPERASI HITUNGAN Dengan dua bilangan riil x dan y, kita dapat menambahkan atau mengalikan keduanya untuk memperoleh dua bilangan riil baru $x + y$ dan $x \cdot y$ (biasanya cukup dituliskan xy). Penambahan dan perkalian mempunyai sifat-sifat yang telah dikenal berikut. Selanjutnya, kita menyebutnya sifat-sifat medan.

Sifat-sifat Medan

1. **Hukum komutatif.** $x + y = y + x$ dan $xy = yx$.
2. **Hukum asosiatif.** $x + (y + z) = (x + y) + z$ dan $x(yz) = (xy)z$
3. **Hukum distribusi.** $x(y + z) = xy + xz$.
4. **Elemen-elemen identitas.** Terdapat dua bilangan riil yang berlainan 0 dan 1 yang memenuhi $x + 0 = x$ dan $x \cdot 1 = x$.
5. **Balikan (Invers).** Setiap bilangan x mempunyai *balikan aditif* (disebut juga sebuah *negatif*), $-x$, yang memenuhi $x + (-x) = 0$. Juga, setiap bilangan x kecuali 0 mempunyai *balikan perkalian* (disebut juga *kebalikan*)x^{-1}, yang memenuhi $x \cdot x^{-1} = 1$.

Pengurangan dan pembagian didefinisikan dengan

$$x - y = x + (-y)$$

dan

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$$

Dari fakta-fakta dasar ini, banyak yang lain menyusul. Kenyataannya, hampir semua aljabar pada akhirnya berpatokan pada lima sifat medan dan definisi pengurangan dan pembagian tersebut.

URUTAN PADA GARIS BILANGAN RIIL **Misalkan $x < y$ berarti x berada di sebelah kiri y pada garis bilangan riil.**

URUTAN Bilangan-bilangan riil bukan nol secara baik dipisahkan menjadi dua himpunan terpisah – bilangan-bilangan riil positif dan bilangan-bilangan riil negatif. Fakta ini memungkinkan kita memperkenalkan relasi urutan $<$ (dibaca "kurang dari") yaitu

$$\boxed{x < y \Leftrightarrow y - x \text{ positif}}$$

Lambang dua anak panah $\Leftrightarrow$ di sini merupakan konjungsi dari $\Rightarrow$ (sehingga) dan $\Leftarrow$ (karena). Jadi, $\Leftrightarrow$ boleh dibaca "setara dengan" atau sebagai "jika dan hanya jika". Kita setuju bahwa $x < y$ dan $y > x$ akan berarti sama. Sehingga $3 < 4$, $4 > 3$, $-3 < -2$, dan $-2 > -3$. Perhatikan ungkapan geometrik $<$ yang ditunjukkan dalam kotak di bawah ini.

Sifat-sifat Urutan

1. **Trikotomi.** Jika x dan y adalah bilangan-bilangan, maka pasti satu di antara yang berikut berlaku:

   $$x < y \text{ atau } x = y \text{ atau } x > y$$

2. **Ketransitifan.** $x < y$ dan $y < z \Rightarrow x < z$
3. **Penambahan.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$
4. **Perkalian.** Bilangan z positif, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$. Bilamana z negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

Relasi urutan $\leqslant$ (dibaca "kurang dari atau sama dengan") adalah sepupu pertama dari $<$. Relasi ini didefinisikan dengan

$$\boxed{x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \text{ positif atau nol}}$$

Sifat-sifat urutan 2, 3, dan 4 berlaku dengan lambang-lambang $<$ dan $>$ diganti oleh $\leqslant$ dan $\geqslant$.

SEDIKIT LOGIKA Hasil penting dalam matematika disebut **teorema**, dan Anda akan menemukan cukup banyak teorema dalam buku ini. Teorema yang dianggap amat penting untuk diketahui di dalam buku ini biasanya diberi nama (misalnya Teorema Pythagoras), sedangkan lainnya dimuat dalam kelompok-kelompok soal dan diperkenalkan dengan kata *tunjukkan bahwa* atau *buktikan bahwa*. Untuk membedakannya dengan aksioma atau definisi yang kebenarannya telah dianggap pasti, teorema memerlukan pembuktian.

Teorema yang dapat dinyatakan dalam bentuk "Jika P maka Q" seringkali disingkat dengan $P \Rightarrow Q$. Kita namakan P sebagai hipotesis dan Q sebagai kesimpulan teorema tersebut. Pembuktian yang mengandung unsur "tunjukkanlah bahwa P harus dapat menyatakan Q".

Para mahasiswa tingkat pertama kadang-kadang mengalami kesulitan membedakan $P \Rightarrow Q$ dengan kebalikannya $Q \Rightarrow P$. Jelasnya, kedua pernyataan ini tidak sama, sebagai contoh: "Bila John adalah seorang Indian maka ia adalah orang Amerika" merupakan pernyataan yang benar, akan tetapi kebalikannya "Bila John adalah orang Amerika maka ia orang Minnesota" jelas merupakan pernyataan yang salah. Di lain pihak, $\sim Q \Rightarrow \sim P$ yang dibaca "bukan Q menyatakan bukan P" dinamakan **kontrapositif** yang ekivalen dengan $P \Rightarrow Q$. Pada contoh tadi, akan benar bahwa "Bila John bukan orang Amerika maka ia bukan orang Minnesota".

Karena pernyataan dan *kontrapositifnya* adalah ekivalen, kita sering menggunakan bentuk ini untuk membuktikan suatu teorema, dan cara seperti ini dinamakan **pembuktian dengan kontradiksi**. Jadi, untuk membuktikan $P \Rightarrow Q$, kita dapat memisalkan $\sim Q$ dan mencoba untuk menyimpulkan $\sim P$ darinya, dengan perkataan lain kita mencoba mengkontradiksi P. Di sini kami berikan contoh sederhana.

> *Teorema:*
>
> **Jumlah dari suatu bilangan rasional dan bilangan tak-rasional adalah tak-rasional.**

Bukti:
Teorema ini dapat ditulis sebagai berikut: "Bila $x = m/n$, di mana m dan n adalah bilangan bulat, dan bila y adalah bilangan takrasional, maka $x + y$ adalah takrasional". Kita misalkan $x + y$ rasional, dan dengan demikian $x + y = p/q$ di mana p dan q adalah bilangan bulat. Maka

$$y = \frac{p}{q} - x = \frac{p}{q} - \frac{m}{n} = \frac{np - mq}{qn}$$

Ini berarti bahwa y adalah bilangan rasional, *bertentangan dengan hipotesis*. Kita berikan teorema tadi terbukti. ■

Cara lain untuk menunjukkan pembuktian secara kontradiksi adalah dengan *Hukum Excluded Middle* yang berbunyi: Salah satu di antara R atau $\sim R$, bukan kedua-duanya.

Pada teorema di atas, bila R adalah pernyataan "Jumlah suatu bilangan rasional dan bilangan takrasional adalah takrasional", pembuktian kita menunjukkan bahwa $\sim R$, tidak benar, maka berarti R benar.

Kadangkala, untuk melakukan pembuktian kita memerlukan cara lain yang dikenal dengan **Induksi Matematis**, yang pada kesempatan ini tidak akan dibahas karena terlalu rinci. Akan tetapi, pembahasan yang selengkapnya kami berikan pada Lampiran A.1.

REDUCTIO AD ABSURDUM

Pembuktian dengan kontrakdiksi dikenal pula dengan nama *reductio ad absurdum*, seperti apa yang telah dikatakan oleh pakar matematika besar G.H. Hardy: "Reductio ad absurdum yang sangat disenangi oleh Euclid, adalah merupakan senjata paling ampuh bagi para matematikawan. Merupakan gambit yang jauh lebih ampuh dari gambit catur manapun; seorang pemain catur dapat menawarkan pengorbanan sebuah bidak ataupun buah lainnya, akan tetapi matematikawan menawarkan permainan".

SOAL-SOAL 1.1

Anda pasti masih ingat bagaimana memanipulasikan bilangan, tetapi tidak ada salahnya untuk mengulang kembali sejenak. Dalam Soal-soal 1-20, sederhanakan sebanyak mungkin. Pastikan untuk menghilangkan semua tanda kurung dan memudahkan semua pecahan.

1. $4 - 3(8 - 12) - 6$
2. $2[3 - 2(4 - 8)]$
3. $-4[3(-6 + 13) - 2(5 - 9)]$
4. $5[-1(7 + 12 - 16) + 4] + 2$
5. $\frac{5}{6} - (\frac{1}{4} + \frac{2}{3})$
6. $\frac{3}{4} - (\frac{7}{12} - \frac{2}{9})$
7. $\frac{1}{3}[\frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}]$
8. $-\frac{1}{3}[\frac{2}{5} - \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})]$
9. $\frac{14}{33}(\frac{2}{3} - \frac{1}{7})^2$
10. $(\frac{4}{7} + \frac{7}{9})/(1 + \frac{1}{2})$
11. $\dfrac{\frac{11}{49} - \frac{3}{7}}{\frac{11}{49} + \frac{3}{7}}$
12. $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{7}{8}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{7}{8}}$
13. $1 - \dfrac{2}{2 + \frac{3}{4}}$
14. $2 + \dfrac{3}{1 + \frac{5}{2}}$
15. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$
16. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$
17. $3\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{8})$
18. $2\sqrt[3]{4}[\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16}]$
19. $(\frac{5}{6} + \frac{1}{3})^{-2}$
20. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{5}{2\sqrt{2}}\right)^{-2}$

Sedikit latihan aljabar akan baik untuk mahasiswa kalkulus. Dalam Soal-soal 21-34, lakukan operasi yang diminta dan sederhanakan.

21. $(2x - 3)(2x + 3)$
22. $(2x - 3)^2$
23. $(3x - 9)(2x + 1)$
24. $(3x + 11)(2x - 4)$

25. $(3t^2 - t + 1)^2$

26. $(2t - 1)^3$

27. $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

28. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

29. $\dfrac{x^3 - 8}{2x - 4}$

30. $\dfrac{2x - 2x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$

31. $\dfrac{18}{x^2 + 3x} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{x + 3}$

32. $\dfrac{2}{6y - 2} + \dfrac{y}{9y^2 - 1} - \dfrac{2y + 1}{1 - 3y}$

33. $\dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$

34. $\dfrac{\dfrac{x}{x - 3} - \dfrac{2}{x^2 - 4x + 3}}{\dfrac{5}{x - 1} + \dfrac{5}{x - 3}}$

35. Cari nilai masing-masing yang berikut; jika tak terdefinisi, katakan demikian.

(a) $0 \cdot 0$ (b) $\frac{0}{0}$
(c) $\frac{0}{8}$ (d) $\frac{8}{0}$
(e) 8^0 (f) 0^8

36. Perlihatkan bahwa pembagian oleh 0 adalah tanpa arti sebagai berikut: Andaikan $a \neq 0$. Jika $a/0 = b$, maka $a = 0 \cdot b = 0$, yang merupakan kontradiksi. Sekarang cari alasan mengapa 0/0 juga tanpa arti.

37. Nyatakanlah apakah masing-masing yang berikut benar atau salah.

(a) $-2 < -20$ (b) $1 > -39$
(c) $-3 < \frac{3}{5}$ (d) $-4 > -16$
(e) $\frac{6}{7} < \frac{34}{39}$ (f) $-\frac{3}{7} < -\frac{44}{39}$

38. Buktikan masing-masing jika $a > 0$, $b > 0$.

(a) $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

(b) $a < b \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

39. Buktikan bahwa rata-rata dua buah bilangan terletak di antara kedua bilangan itu; artinya, buktikan bahwa

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a + b}{2} < b$$

40. Mana di antara yang berikut selalu benar jika $a \leq b$?.

(a) $a - 4 \leq b - 4$ (b) $-a \leq -b$
(c) $a^2 \leq ab$ (d) $a^3 \leq a^2 b$

41. Bilangan prima adalah bilangan asli (bilangan bulat positif) yang hanya mempunyai dua bilangan asli pembagi, bilangan itu sendiri dan 1. Beberapa bilangan prima yang pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17. Menurut Teorema Dasar Hitungan, setiap bilangan asli (selain 1) dapat kita tulis sebagai hasil kali suatu himpunan unik bilangan prima. Misalnya, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$. Tuliskan masing-masing yang berikut sebagai suatu hasil kali bilangan-bilangan prima. *Catatan:* Hasil kali tersebut adalah trivial jika bilangan itu adalah prima—yaitu, ia hanya mempunyai satu faktor.

(a) 240 (b) 310
(c) 119 (d) 5400

42. Gunakan Teorema Dasar Hitungan (Soal 41) untuk membuktikan bahwa kuadrat sebarang bilangan asli (selain 1) dapat kita tulis sebagai hasil kali suatu himpunan unik bilangan prima, dengan masing-masing bilangan prima ini muncul sebanyak bilangan *genap*. Misalnya, $(45)^2 = 3.3.3.3.5.5$.

43. Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah takrasional. *Petunjuk:* Andaikan $\sqrt{2} = p/q$, di mana p dan q adaalah bilangan-bilangan asli (bukan 1). Maka $2 = p^2/q^2$, sehingga $2q^2 = p^2$. Sekarang gunakan Soal 42 untuk menemukan suatu kontradiksi.

44. Buktikan bahwa $\sqrt{3}$ adalah takrasional (lihat Soal 43).

45. Buktikan bahwa jumlah dua bilangan rasional adalah rasional.

46. **Buktikan bahwa hasilkali sebuah bilangan rasional (selain 0) dengan sebuah**

bilangan takrasional adalah takrasional. *Petunjuk:* Coba buktikan melalui kontradiksi.

47. Mana diantara yang berikut rasional dan mana yang takrasional?

(a) $\sqrt{4}$ (b) 0,375

(c) $1 + \sqrt{2}$ (d) $(1 + \sqrt{3})^2$

(e) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{2})$ (f) $5\sqrt{2}$

48. Apakah jumlah dua bilangan takrasional pasti takrasional? Jelaskan.

49. Tunjukkan bahwa bila bilangan asli m bukan merupakan bentuk kuadrat sempurna, maka $\sqrt{m}$ takrasional.

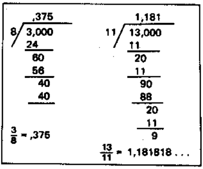
50. Tunjukkan bahwa $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ takrasional.

51. Tunjukkan bahwa $\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$ takrasional.

52. Tunjukkan bahwa $\log_{10} 5$ takrasional.

1.2 Desimal, Kerapatan, Kalkulator

Sebarang bilangan rasional dapat ditulis sebagai, suatu desimal, karena berdasarkan definisi bilangan ini selalu dapat dinyatakan sebagai hasil bagi dua bilangan bulat; jika pembilang kita bagi dengan penyebut, kita peroleh suatu desimal. Misalnya (Gambar 1),



$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$\frac{13}{11} = 1{,}181818\ldots$$

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

GAMBAR 1

Bilangan-bilangan takrasional dapat juga diungkapkan sebagai desimal-desimal. Sebagai contoh.

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$$
$$\pi = 3{,}1415926535\ldots$$

DESIMAL BERULANG DAN TAK-BERULANG Pernyataan desimal suatu bilangan rasional dapat mempunyai akhir (seperti dalam $\frac{3}{8} = 0{,}375$) atau akan berulang dalam daur yang tetap selamanya (seperti dalam $\frac{13}{11} = 1{,}181818\ldots$). Percobaan kecil dengan proses pembagian panjang akan menunjukkan kepada anda mengapa demikian. (Disebabkan hanya terdapat suatu bilangan berhingga sisa-sisa yang berlainan). Sebuah desimal yang mempunyai akhir dapat dipandang sebagai suatu desimal berulang yang angka-angka akhirnya semuanya nol. Misalnya,

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 0{,}3750000\ldots$$

Jadi setiap bilangan rasional dapat dituliskan sebagai suatu desimal berulang. Adalah suatu kenyataan yang penting bahwa kebalikannya juga benar. Setiap desimal yang berulang menyatakan suatu bilangan rasional. Ini jelas dalam kasus suatu desimal berulang (misalnya, 3,137 = 3137/1000) dan mudah dibuktikan secara umum.

CONTOH 1 **(Desimal berulang adalah rasional).** Buktikan bahwa

$$x = 0{,}136136136\ldots \qquad \text{dan} \qquad y = 0{,}27171717\ldots$$

menyatakan bilangan-bilangan rasional.

Penyelesaian. Kita kurangkan x dari $1000x$ dan kemudian selesaikan untuk x.

$$\begin{aligned} 1000x &= 136{,}136136\ldots \\ x &= 0{,}136136\ldots \\ \hline 999x &= 136 \\ x &= \frac{136}{999} \end{aligned}$$

Demikian pula,

$$\begin{aligned} 100y &= 27{,}17171717\ldots \\ y &= 0{,}27171717\ldots \\ \hline 99y &= 26{,}9 \\ y &= \frac{26{,}9}{99} = \frac{269}{990} \end{aligned}$$

Secara umum, langkah pertama adalah mengalikan suatu desimal berulang z dengan 10^m jika desimal tersebut berulang dalam suatu daur yang memuat m angka. ■

Bilangan Riil	
Bilangan Rasional (desimal takberulang)	Bilangan Rasional (desimal berulang)

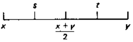
GAMBAR 2

Pernyataan desimal bilangan-bilangan takrasional tidak berulang menurut suatu daur. Sebaliknya, suatu desimal tak berulang pasti menyatakan suatu bilangan takrasional. Sehingga, misalnya,

$$0{,}101001000100001\ldots$$

pasti menyatakan suatu bilangan takrasional. Diagram dalam Gambar 2 meringkaskan apa yang telah disampaikan.

KERAPATAN Diantara dua bilangan riil sebarang yang berlainan x dan y, terdapat suatu bilangan riil lain. Khususnya, bilangan $z = (x + y)/2$ adalah bilangan pertengahan antara x dan y (Gambar 3). Karena terdapat juga suatu bilangan s antara x dan z dan bilangan lain t antara z dan y dan karena argumentasi ini dapat diulang sampai takterhingga, kita dipaksa mengambil kesimpulan yang menakjubkan tetapi benar bahwa di antara dua bilangan riil sebarang (tidak perduli betapapun dekatnya), terdapat takterhingga banyaknya bilangan riil lain. Ini samasekali akan menghapus pemikiran seperti "bilangan yang sedikit lebih besar daripada 3". Tidak terdapat bilangan yang demikian.



GAMBAR 3

Sebenarnya kita dapat mengatakan lebih banyak. Di antara dua bilangan riil sebarang yang berlainan, terdapat bilangan rasional maupun bilangan takrasional – dan karenanya takterhingga banyaknya dari tiap jenis.

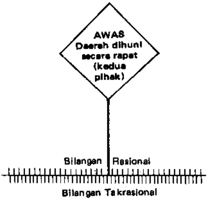
CONTOH 2. Carilah suatu bilangan rasional dan bilangan takrasional di antara x dan y jika

$$x = 0{,}31234158\ldots$$
$$y = 0{,}31234200\ldots$$

Penyelesaian. Andaikan

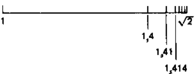
$$z = 0{,}312341600000\ldots$$
$$w = 0{,}3123416010010001\ldots$$

Maka z adalah rasional (berakhir dengan pengulangan 0), sedangkan w adalah takrasional (perhatikan pola penyisipan 0 yang semakin banyak di antara angka 1). Seharusnya jelas bahwa $x < z < w < y$. ■



GAMBAR 4

Satu cara bagaimana matematikawan memeriksa situasi yang telah dibahas tersebut adalah dengan mengatakan bahwa bilangan rasional dan takrasional keduanya rapat sepanjang garis riil (Gambar 4). Setiap bilangan mempunyai tetangga rasional dan takrasional yang cukup dekat dengannya. Kedua jenis bilangan tersebut saling berkaitan tak terpisahkan dan menggerombol bersama-sama.



GAMBAR 5

Salah satu manifestasi dari sifat kerapatan yang baru saja diuraikan adalah bahwa sebarang bilangan takrasional dapat dihampiri oleh suatu bilangan rasional sedekat yang kita sukai. Contohnya adalah $\sqrt{2}$. Barisan bilangan-bilangan rasional 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,4121; 1,414213, ... berbaris dan tak dapat ditawar-tawar menuju $\sqrt{2}$ (gambar 5). Dengan berjalan cukup jauh dalam barisan ini, kita dapat berada sedekat mungkin ke $\sqrt{2}$ seperti yang kita inginkan.

KALKULATOR Di masa yang lalu para ilmuwan dan insinyur berkeliaran di kampus dengan 'slide-rule' tergantung di ikat pinggangnya. Saat ini mereka mengantongi kalkulator di sakunya. Jika anda belum mempunyai salah satu dari ahli sihir elektronika ini, kami anjurkan anda untuk membelinya. Yakinkan untuk memperoleh model ilmiah (dengan sinus, kosinus, dan logaritma) dan, jika anda mampu, kami rekomendasikan versi yang dapat diprogram. Anda akan menjumpai banyak penggunaan kalkulator dalam buku ini, khususnya dalam soal-soal yang ditandai dengan $\boxed{C}$.

Satu kenyataan yang segera jelas kelihatan adalah bahwa kita tidak dapat memasukkan suatu desimal tak berhingga ke dalam sebuah kalkulator. Kalkulator secara eksklusif bekerja dengan desimal yang panjangnya telah ditentukan sebelumnya (misalnya, sepuluh angka). Nyatanya, kalkulator hanya menangani bilangan-bilangan rasional dengan uraian desimal yang berhenti secara cepat. Sehingga, kita sering harus membulatkan suatu bilangan untuk memasukkannya ke kalkulator, dan jawab yang diberikan oleh kalkulator biasanya juga akan dibulatkan. Misalnya, kalkulator tidak akan pernah memakai nilai sebenarnya dari $\sqrt{2}$ tetapi harus puas dengan suatu hampiran seperti

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$$

Di sini kita telah memakai lambang $\approx$ untuk menyingkat ungkapan "secara hampiran sama dengan".

Nasehat kami adalah ini: Lakukan perhitungan yang mudah tanpa memakai kalkulator, khususnya jika ini dapat menghasilkan jawab yang sebenarnya. Misalnya, secara umum kita lebih menyukai jawab sebenarnya $\sqrt{3}/2$ untuk sinus dari $\pi/3$ dibandingkan nilai hasil kalkulator 0,8660254. Tetapi, dalam perhitungan yang rumit kami anjurkan penggunaan kalkulator. Anda akan lihat bahwa kunci jawaban kami pada bagian akhir buku sering kali memberikan jawaban yang sebenarnya maupun hampiran desimal yang diperoleh dari penggunaan kalkulator.

SOAL-SOAL 1.2

Dalam Soal-soal 1-6, ubah tiap bilangan rasional menjadi desimal dengan melakukan pembagian panjang.

1. $\frac{7}{8}$ 2. $\frac{3}{7}$

3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{5}{13}$

5. $\frac{11}{3}$ 6. $\frac{11}{7}$

Dalam Soal-soal 7-12, ubah masing-masing desimal berulang menjadi suatu hasil bagi dua bilangan bulat (lihat Contoh 1).

7. 0,123123123... 8. 0,217171717...

9. 2,56565656... 10. 3,929292...

11. 0,199999... 12. 0,399999...

13. Dari Soal-soal 11 dan 12, Anda melihat bahwa beberapa bilangan rasional tertentu mempunyai dua uraian desimal yang berlainan (0,199999... = 0,200000 .... dan 0,399999 ... = 0,400000). Bilangan-bilangan rasional mana yang mempunyai sifat-sifat ini?

14. Buktikan bahwa bilangan rasional sebarang p/q, dengan faktorisasi prima dari q seluruhnya terdiri dari 2 dan 5, memiliki suatu uraian desimal yang mempunyai akhir.

15. Carilah sebuah bilangan rasional positif dan sebuah bilangan takrasional positif yang keduanya lebih kecil dari pada 0,00001.

16. Berapa bilangan bulat positif terkecil? Bilangan rasional positif terkecil? Bilangan takrasional positif terkecil?

17. Cari bilangan takrasional antara 3,14159 dan π (lihat Contoh 2 dan catat bahwa π = 3,141592...).

18. Apakah $(\pi - \frac{22}{7})$ positif, negatif, atau nol?

19. Apakah terdapat bilangan antara 0,9999 . . . dengan angka 9 yang berulang terus dengan 1?

20. Carilah bilangan rasional antara $\frac{17}{37}$ dengan $\frac{52}{111}$.

21. Apakah 0,1234567891011121314. rasional atau takrasional? (Anda seharusnya melihat suatu pola dalam barisan angka yang diberikan).

22. Carilah dua bilangan takrasional yang jumlahnya rasional.

$\boxed{C}$ Dalam Soal-soal 23-32, cari hampiran desimal yang terbaik yang dapat dilakukan oleh kalkulator anda.

23. $(\sqrt{2} + 1)^3$

24. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$

25. $\sqrt[4]{1,215} - \sqrt[3]{1,015}$

26. $(3,617)^{-1/2}$

27. $\dfrac{\sqrt{130} - \sqrt{5}}{3^{1,2} - 3}$

28. $\dfrac{\sqrt{143,2} + \sqrt{36,1}}{(23,41)^4 - (11,2)^2}$

29. $\dfrac{(6,34 \times 10^7)(5,23 \times 10^6)}{4,21 \times 10^9}$

30. $\dfrac{(0,00121)(5,23 \times 10^{-3})}{6,16 \times 10^{-4}}$

31. $\sqrt{3\pi^2 + 2} + 4$

32. $\sqrt[4]{(6\pi^2 - 2)\pi}$

$\boxed{C}$ 33. Perhatikan bahwa

$$2x^3 - 7x^2 + 11x - 2 = [(2x - 7)x + 11]x - 2$$

Untuk menghitung suku di ruas kanan untuk x = 3, tekan tombol-tombol berikut pada sebuah kalkulator aljabar logika.

$$2 \boxed{\times} 3 \boxed{-} 7 \boxed{=} \boxed{\times} 3 \boxed{+} 11 \boxed{=} \boxed{\times} 3 \boxed{-} 2 \boxed{=}$$

Gunakanlah pemikiran ini untuk menghitung ungkapan yang diberikan dalam tiap kasus.

(a) $x = \pi$ (b) $x = 2,15$

(c) $x = 11,19$

$\boxed{C}$ 34. Gunakanlah pemikiran yang dibahas dalam Soal 33 untuk menghitung $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x - 10$ pada setiap nilai.

(a) $x = 1$ (b) $x = \pi$

(c) $x = 13,53$

35. Suatu bilangan b dinamakan batas atas dari suatu himpunan bilangan S bila $x \leq b$ untuk setiap x di S. Sebagai contoh 5, 6,5 dan 13 adalah batas atas dari himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Angka 5 merupakan **batas atas terkecil** dari S. Demikian pula 1,6, 2 dan 2,5 adalah batas atas dari himpunan tak-terhingga $T = \{1,4, 1,49, 1,499, 1,4999 \ldots\}$, di mana 1,5 adalah merupakan batas atas terkecil. Tentukan batas atas terkecil dari setiap himpunan berikut:

(a) $S = \{-10, -8, -6, -4, -2\}$

(b) $S = \{-2, -2,1, -2,11, -2,111, -2,111 \ldots\}$

(c) $S = \{2,4, 2.44, 2.444, 2.4444, \ldots\}$

(d) $S = \{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, \ldots\}$

(e) $S = \{x : x = (-1)^n + 1/n$, n bilangan bulat positif$\}$; yaitu, S adalah himpunan semua bilangan x yang berbentuk $x = (-1)^n + 1/n$, dengan n adalah bilangan bulat positif.

(f) $S = \{x : x^2 < 2$, x adalah bilangan rasional$\}$.

36. **Aksioma Kelengkapan** untuk bilangan-bilangan riil menyebutkan: *Setiap himpunan bilangan-bilangan riil yang memiliki batas atas, mempunyai sebuah batas atas terkecil berupa bilangan riil.*

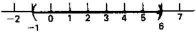
(a) Tunjukkan bahwa pernyataan tersebut di atas, salah bila kata riil diganti dengan rasional.

(b) Apakah pernyataan tersebut di atas akan benar atau salah bila kata riil diganti dengan asli?

Contoh: Bilangan-bilangan riil **R** adalah satu-satunya himpunan bilangan-bilangan yang sekaligus memiliki sifat medan, sifat urutan, dan sifat kelengkapan.

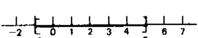
1.3 Ketaksamaan

Menyelesaikan suatu persamaan (misalnya, $3x - 17 = 6$ atau $x^2 - x - 6 = 0$) merupakan satu tugas tradisional dalam matematika; hal ini penting dalam kuliah dan kami anggap anda ingat bagaimana mengerjakannya. Tetapi hal yang hampir sama pentingnya dalam kalkulus adalah pengertian penyelesaian ketaksamaan (misalnya, $3x - 17 < 6$ atau $x^2 - x - 6 \geq 0$). Menyelesaikan suatu ketaksamaan adalah mencari semua himpunan bilangan riil yang membuat ketaksamaan berlaku. Berbeda dengan persamaan, di mana himpunan pemecahannya secara normal terdiri dari satu bilangan atau mungkin sejumlah bilangan berhingga, himpunan pemecahan suatu ketaksamaan biasanya terdiri dari suatu keseluruhan selang bilangan atau, dalam beberapa kasus, suatu gabungan dari selang-selang yang demikian.



$(-1, 6) = \{x : -1 < x < 6\}$

GAMBAR 1



$[-1, 5] = \{x : -1 \leq x \leq 5\}$

GAMBAR 2

SELANG Beberapa jenis selang akan muncul dalam pekerjaan kita dan kami akan memperkenalkan istilah dan cara penulisan khusus untuk selang ini. Ketaksamaan ganda $a < x < b$ memerikan **selang terbuka** yang terdiri dari semua bilangan antara a dan b, tidak termasuk titik-titik ujung a dan b. Kita nyatakan dia dengan lambang (a,b) (Gambar 1) Sebaliknya, ketaksamaan $a \leq x \leq b$ memerikan **selang tertutup** yang berpadanan, yang mencakup titik-titik ujung a dan b. Ini dinyatakan oleh $[a, b]$ (Gambar 2) Tabel 1 berikut menunjukkan sejumlah besar kemungkinan dan memperkenalkan cara penulisan kita.

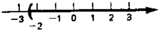
Penulisan Himpunan	*Penulisan Selang*	*Grafik*
$\{x : a < x < b\}$	(a, b)	a b
$\{x : a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	a b
$\{x : a \leq x < b\}$	$[a, b)$	a b
$\{x : a < x \leq b\}$	$(a, b]$	a b
$\{x : x \leq b\}$	$(-\infty, b]$	b
$\{x : x < b\}$	$(-\infty, b)$	b
$\{x : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	a
$\{x : x > a\}$	(a, ∞)	a
R	$(-\infty, \infty)$	

MENYELESAIKAN KETAKSAMAAN Sama halnya seperti dengan persamaan, prosedur untuk menyelesaikan ketaksamaan terdiri atas pengubahan ketaksamaan satu langkah tiap kali sampai himpunan pemecahan jelas. Alat utama adalah sifat-sifat urutan dari Pasal 1.1. Ini berarti bahwa kita dapat melaksanakan operasi-operasi tertentu pada suatu ketaksamaan tanpa mengubah himpunan pemecahannya. Khususnya:

1. *kita dapat menambahkan bilangan yang sama pada kedua pihak suatu ketaksamaan;*
2. *kita dapat mengalikan kedua pihak suatu ketaksamaan dengan suatu bilangan positif;*
3. *kita dapat mengalikan kedua pihak dengan suatu bilangan negatif, tetapi kemudian kita harus membalikkan arah tanda ketaksamaan.*

CONTOH 1. Selesaikanlah ketaksamaan $2x - 7 < 4x - 2$ dan perlihatkan grafik himpunan penyelesaiannya.

Penyelesaian.



$\left(-\frac{5}{2}, \infty\right) = \left\{x : x > -\frac{5}{2}\right\}$

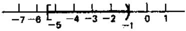
GAMBAR 3

$$\begin{aligned} 2x - 7 &< 4x - 2 & & \\ 2x &< 4x + 5 & & \text{(tambahkan 7)} \\ -2x &< 5 & & \text{(tambahkan } -4x) \\ x &> -\tfrac{5}{2} & & \text{(kalikan dengan } -\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Grafik tampak dalam Gambar 3. ■

CONTOH 2. Selesaikan $-5 \leq 2x + 6 < 4$.

Penyelesaian.



$\left[-\frac{11}{2}, -1\right) = \left\{x : -\frac{11}{2} \leq x < -1\right\}$

GAMBAR 4

$$\begin{aligned} -5 \leq 2x + 6 &< 4 & & \\ -11 \leq 2x &< -2 & & \text{(tambahkan } -6) \\ -\tfrac{11}{2} \leq x &< -1 & & \text{(kalikan dengan } \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

Gambar 4 memperlihatkan grafiknya. ■

Sebelum menangani ketaksamaan kuadrat, kita tunjukkan bahwa suatu faktor linear berbentuk $x - a$ adalah positif untuk $x - a$ adalah positif untuk $x > a$ dan negatif untuk $x < a$. Ini berarti bahwa hasil kali $(x - a)(x - b)$ dapat berubah dari bernilai positif menjadi negatif, atau sebaliknya, hanya pada a atau b. Titik-titik ini, pada mana suatu faktor adalah nol, disebut **titik-titik pemecah**. Titik-titik ini merupakan kunci untuk menentukan himpunan pemecahan dari ketaksamaan kuadratis atau tingkat lebih tinggi.

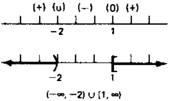
CONTOH 3. Selesaikanlah ketaksamaan kuadrat $x^2 - x < 6$.

Penyelesaian. Sebagaimana dengan persamaan kuadrat, kita memindahkan semua suku bukan nol ke salah satu ruas dan faktornya.

$$\begin{aligned} x^2 - x &< 6 & & \\ x^2 - x - 6 &< 0 & & \text{(tambahkan } -6) \\ (x - 3)(x + 2) &< 0 & & \text{(faktorkan)} \end{aligned}$$

CONTOH 5. Selesaikanlah $\dfrac{x-1}{x+2} \geq 0.$

Penyelesaian. Kecenderungan untuk mengalikan kedua pihak dengan $x + 2$ segera menimbulkan dilema, karena $x + 2$ mungkin positif atau negatif. Haruskah kita membalikkan tanda ketaksamaan atau membiarkannya demikian?. Ketimbang mencoba menguraikan masalah ini (yang akan berarti memecahnya menjadi dua kasus) kita amati bahwa hasil bagi $(x - 1)/(x + 2)$ hanya dapat berubah tanda pada titik-titik pemecah dari pembilang dari penyebut, yaitu pada 1 dan -2. Titik-titik uji $-3, 0$, dan 2 menghasilkan informasi yang diperagakan dalam Gambar 7. Lambang *u* menunjukkan bahwa hasil bagi tak terdefinisi di -2. Kita simpulkan bahwa himpunan penyelesaian adalah $(-\infty, -2) \cup [1, \infty)$. Perhatikan bahwa -2 tidak berada dalam himpunan penyelesaian karena hasil bagi tidak terdefinisi di sana. Di lain pihak, 1 diikutkan karena ketaksamaan sahih di 1. ∎



GAMBAR 7.

CONTOH 6. Selesaikanlah $\dfrac{2x-5}{x-2} \leq 1.$

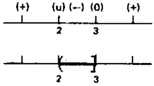
Penyelesaian. Tuliskan kembali ketaksamaan secara beruntun sebagai

$$\frac{2x-5}{x-2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{2x-5-(x-2)}{x-2} \leq 0$$

$$\frac{x-3}{x-2} \leq 0$$

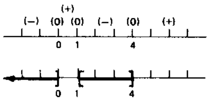
Kemudian lanjutkan seperti dalam Contoh 6. Ringkasan yang diperlihatkan dalam Gambar 8 menghasilkan himpunan penyelesaian $(2, 3]$. ∎



GAMBAR 8.

CONTOH 7. Selesaikanlah $x^3 - 5x^2 + 4x \leq 0.$

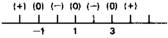
Penyelesaian. Persamaan tingkat tiga $x^3 - 5x^2 + 4x$ difaktorkan sebagai $x(x - 1)(x - 4)$, sehingga terdapat tiga titik pemecah $-0, 1$ dan 4—yang membagi garis riil menjadi empat selang. Bilamana kita menguji selang-selang ini, kita peroleh informasi dalam Gambar 9. Himpunan penyelesaian adalah $(-\infty, 0] \cup [1, 4]$. ■



GAMBAR 9

CONTOH 8. Selesaikanlah $(x+1)(x-1)^2(x-3) \leq 0$.

Penyelesaian. Titik-titik pemecahan adalah -1, 1, dan 3, yang membagi garis riil menjadi empat selang, seperti diperlihatkan dalam Gambar 10. Setelah pengujian selang-selang ini, kita dapatkan bahwa himpunan penyelesaian adalah $[-1, 1] \cup [1, 3]$; yaitu, selang $[-1, 3]$. ■



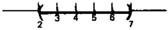
GAMBAR 10

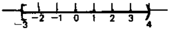
SOAL-SOAL 1.3

1. Tunjukkan masing-masing selang berikut pada garis riil.

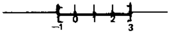
(a) $(-4, 1)$ (b) $[-4, 1]$
(c) $(-4, 1]$ (d) $[-4, 1)$
(e) $[1, \infty)$ (f) $(-\infty, -4]$

2. Gunakan cara penulisan Soal 1 untuk memerikan selang-selang berikut.

(a)


(b)


(c)


(d)


Dalam tiap Soal 3-34, nyatakanlah himpunan penyelesaian dari ketaksamaan yang diberikan dalam cara penulisan selang dan sketsakan grafiknya.

3. $4x - 7 < 3x + 5$
4. $2x + 16 < x + 25$
5. $7x - 1 \leq 10x + 4$
6. $6x - 10 \geq 5x - 16$
7. $10x + 1 > 8x + 5$
8. $3x + 5 > 7x + 17$
9. $-6 < 2x + 3 < -1$
10. $-3 < 4x - 9 < 11$
11. $-2 < 1 - 5x \leq 3$
12. $4 < 5 - 3x < 7$
13. $2 + 3x < 5x + 1 < 16$
14. $2x - 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$
15. $x^2 + x - 12 < 0$
16. $x^2 - 5x + 6 > 0$
17. $3x^2 - 11x - 4 \leq 0$
18. $2x^2 + 7x - 15 \geq 0$

19. $2x^2 + 5x - 3 > 0$

20. $4x^2 - 5x - 6 < 0$

21. $\dfrac{x+5}{2x-1} \leq 0$

22. $\dfrac{2x-3}{x+1} > 0$

23. $\dfrac{1}{x} < 5$

24. $\dfrac{7}{2x} < 3$

25. $\dfrac{1}{3x-2} \leq 4$

26. $\dfrac{3}{x+5} > 2$

27. $\dfrac{x-2}{x+4} < 2$

28. $\dfrac{2x-1}{x-3} > 1$

29. $(x+2)(2x-1)(3x+7) \geq 0$

30. $(2x+3)(3x-1)(x-2) < 0$

31. $(2x+3)(3x-1)^2(x-5) < 0$

32. $(x+5)(x+2)^2(2x-1) > 0$

33. $x^3 - 5x^2 - 6x < 0$

34. $x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

35. Carilah semua nilai x yang memenuhi kedua ketaksamaan secara serentak (simultan).

(a) $3x + 7 > 1$ dan $2x + 1 < 3$
(b) $3x + 7 > 1$ dan $2x + 1 > -4$
(c) $3x + 7 > 1$ dan $2x + 1 < -4$

36. Carilah semua nilai x yang memenuhi paling sedikit satu dari dua ketaksamaan.

(a) $3x + 7 > 1$ atau $2x + 1 < -5$
(b) $3x + 7 \leq 1$ atau $2x + 1 < -8$
(c) $3x + 7 \leq 1$ atau $2x + 1 > -8$

37. Tentukan x, dan nyatakan jawabannya dalam notasi selang (interval).

(a) $(x+1)(x^2+2x-7) \geq x^2 - 1$
(b) $x^4 - 2x^2 \geq 8$
(c) $(x^2+1)^2 - 7(x^2+1) + 10 < 0$

38. Selesaikan $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} \leq 0$.

39. Persamaan $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ menyatakan hambatan total R dalam suatu rangkaian listrik yang mengandung tiga hambatan R_1, R_2 dan R_3 dihubungkan secara paralel. Bila $10 \leq R_1 \leq 20$, $20 \leq R_2 \leq 30$, dan $30 \leq R_2 \leq 40$, tentukan batas harga untuk R.

1.4 Nilai Mutlak, Akar Kuadrat, Kuadrat

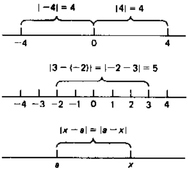
Konsep nilai mutlak sangat berguna dalam kalkulus dan pembaca perlu terampil dalam bekerja dengannya. **Nilai mutlak** suatu bilangan riil x, dinyatakan oleh $|x|$, didefinisikan sebagai

$$\boxed{\begin{array}{ll} |x| = x & \text{jika } x \geq 0 \\ |x| = -x & \text{jika } x < 0 \end{array}}$$

Misalnya, $|6| = 6$, $|0| = 0$, dan $|-5| = -(-5) = 5$.

Definisi dua-cabang ini patut dikaji secara seksama. Perhatikan bahwa ini tidak mengatakan bahwa $|-x| = x$ (cobalah $x = -5$ untuk melihat sebabnya). Adalah benar bahwa $|x|$ selalu taknegatif; adalah benar juga bahwa $|-x| = |x|$.

Salah satu cara terbaik untuk membayangkan nilai mutlak adalah sebagai jarak (tak-berarah). Khususnya, $|x|$ adalah jarak antara x dengan titik asal. Serupa, $|x - a|$ adalah jarak antara x dengan a (Gambar 1).

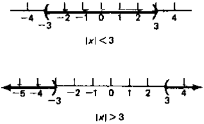


GAMBAR 1

SIFAT-SIFAT Nilai mutlak berperilaku manis dalam perkalian dan pembagian, tetapi tidak begitu baik dalam penambahan dan pengurangan.

Sifat-sifat nilai mutlak

1. $|ab| = |a|\,|b|$
2. $\dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{|a|}{|b|}$
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (ketaksamaan segitiga)
4. $|a - b| \geq ||a| - |b||$



GAMBAR 2

KETIDAKSAMAAN YANG MENYANGKUT NILAI MUTLAK Jika $|x| < 3$, maka x harus secara sekaligus lebih kecil dari 3 dan lebih besar dari -3; yaitu $-3 < x < 3$. Berlainan jika $|x| > 3$, maka $x < -3$ atau $x > 3$ (Gambar 2) Ini merupakan kasus-kasus khusus dari pernyataan-pernyataan umum berikut.

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

$$|x| > a \iff x < -a \text{ atau } x > a$$

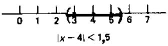
Kita dapat menggunakan fakta ini untuk menyelesaikan ketaksamaan yang menyangkut nilai mutlak, karena fakta tersebut memberikan cara untuk menghilangkan tanda nilai mutlak.

CONTOH 1. Selesaikan ketaksamaan $|x - 4| < 1{,}5$ dan perlihatkan himpunan penyelesaiannya pada garis riil.

Penyelesaian. Dari pernyataan kotak pertama dengan x digantikan oleh $x - 4$, terlihat bahwa

$$|x - 4| < 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad -1{,}5 < x - 4 < 1{,}5$$

Bilamana 4 ditambahkan pada ketiga anggota ketaksamaan yang belakangan, diperoleh $2{,}5 < x < 5{,}5$. Grafiknya diperhatikan dalam Gambar 3.



GAMBAR 3

Ada cara lain untuk melihat masalah ini, dan ini sama pentingnya. Lambang $|x - 4|$ menyatakan jarak antara x dengan 4. Jadi mengatakan $|x - 4| < 1{,}5$ sama saja dengan mengatakan bahwa *jarak antara x dengan 4 kurang dari* 1,5. Bilangan-bilangan x yang mempunyai sifat ini adalah bilangan-bilangan antara 2,5 dan 5,5, yaitu $2{,}5 < x < 5{,}5$. ■

Pernyataan-pernyataan dalam kotak yang diperagakan tepat sebelum Contoh 1 tetap sahih dengan $<$ dan $>$ masing-masing diganti oleh $\leq$ dan $\geq$. Dalam contoh berikutnya diperlukan pernyataan yang kedua dalam bentuk ini.

CONTOH 2. Selesaikan ketaksamaan $|3x - 5| \geq 1$ dan perlihatkan himpunan penyelesaiannya pada garis riil.

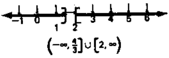
Penyelesaian. Ketaksamaan ini dapat ditulis secara berurutan sebagai

$$3x - 5 \leq -1 \text{ atau } 3x - 5 \geq 1$$

$$3x \leq 4 \text{ atau } 3x \geq 6$$

$$x \leq \frac{4}{3} \text{ atau } x \geq 2$$

Himpunan penyelesaian berupa gabungan dua selang: yaitu himpunan $(-\infty, 4/3] \cup [2, \infty])$ yang diperlihatkan dalam Gambar 4. ■



GAMBAR 4

Bila kita sampai pada definisi "epsilon, delta" dari limit dalam Bab 2, kita akan perlu membuat manipulasi seperti yang digambarkan dalam dua contoh berikut. Dalam abjad Yunani, delta dan epsilon masing-masing adalah abjad yang keempat dan kelima dan secara tradisional digunakan untuk menggantikan bilangan-bilangan positif kecil.

CONTOH 3. Andaikan ε (epsilon) adalah suatu bilangan positif. Buktikan bahwa

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} \Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon$$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} |x-2| < \frac{\varepsilon}{5} &\Leftrightarrow 5|x-2| < \varepsilon && \text{(kalikan dengan 5)} \\ &\Leftrightarrow |5||x-2| < \varepsilon && (|5| = 5) \\ &\Leftrightarrow |5(x-2)| < \varepsilon && (|a||b| = |ab|) \\ &\Leftrightarrow |5x-10| < \varepsilon \end{aligned}$$ ■

CONTOH 4. Andaikan ε suatu bilangan positif. Carilah bilangan positif δ (delta) sedemikian sehingga

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |6x-18| < \varepsilon$$

Penyelesaian.

$$\begin{aligned} |6x-18| < \varepsilon &\Leftrightarrow |6(x-3)| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 6|x-3| < \varepsilon && (|ab| = |a||b|) \\ &\Leftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{6} && \text{(kalikan dengan } \tfrac{1}{6}) \end{aligned}$$

Karenanya, kita pilih $\delta = \varepsilon/6$. Secara mundur, terlihat bahwa

$$|x-3| < \delta \Rightarrow |6x-18| < \varepsilon$$ ■

AKAR KUADRAT Setiap bilangan positif mempunyai dua akar kuadrat. Misalnya, dua akar kuadrat dari 9 adalah -3 dan 3; dua akar dari 100 adalah -10 dan 10. Untuk $a \geq 0$, **lambang** $\sqrt{a}$, **disebut akar kuadrat utama** dari a, yang menunjukkan akar kuadrat taknegatif dari a. Jadi $\sqrt{9} = 3$ dan $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$. Dua akar kuadrat dari 7 adalah $\pm\sqrt{7}$. Adalah tidak benar menuliskan $\sqrt{16} = \pm 4$; cukup $\sqrt{16} = 4$. Berikut sebuah kenyataan penting yang bermanfaat untuk diingat.

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

Hampir semua mahasiswa akan ingat pada **rumus kuadrat**. Penyelesaian untuk $ax^2 + bx + c = 0$ diberikan oleh

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Bilangan $d = b^2 - 4ac$ dinamakan **diskriminan** dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Persamaan ini mempunyai dua jawaban riil bila $d > 0$, satu jawaban riil bila $d = 0$, dan tidak memiliki jawaban riil bila $d < 0$.

Dengan Rumus Kuadrat, dengan mudah kita dapat menyelesaikan ketaksamaan-ketaksamaan kuadrat termasuk yang mudah difaktorkan.

CONTOH 5. **Selesaikan** $x^2 - 2x - 4 \leq 0$.

Penyelesaian. Dua penyelesaian dari $x^2 - 2x - 4 = 0$ adalah

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 - \sqrt{5} \approx -1{,}24$$

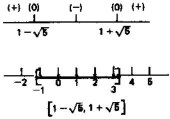
dan

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{4 + 16}}{2} = 1 + \sqrt{5} \approx 3{,}24$$

Sehingga

$$x^2 - 2x - 4 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 + \sqrt{5})(x - 1 - \sqrt{5})$$

Titik-titik pemecah $1 - \sqrt{5}$ dan $1 + \sqrt{5}$ membagi garis riil menjadi tiga selang (Gambar 5). Bilamana kita mengujinya dengan titik-titik uji -2, 0, dan 4, didapatkan bahwa himpunan penyelesaian untuk $x^2 - 2x - 4 \leq 0$ adalah $[1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}]$. ■



GAMBAR 5

Sambil lalu kita menyebutkan bahwa jika n genap dan $a \geq 0$, maka lambang $\sqrt[n]{a}$ selalu menunjukkan akar taknegatif ke-n dari a. Bilamana n ganjil, hanya terdapat satu akar riil ke-n dari a, ditunjukkan oleh lambang $\sqrt[n]{a}$. Jadi $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[3]{27} = 3$, dan $\sqrt[3]{-8} = -2$.

KUADRAT **Beralih ke kuadrat, kita perhatikan bahwa**

$$\boxed{|x|^2 = x^2}$$

Ini berasal dari sifat $|a||b| = |ab|$.

Apakah operasi pengkuadratan mempertahankan ketaksamaan? Secara umum, jawabnya adalah tidak. Misalnya, $-3 < 2$, tetapi $(-3)^2 > 2^2$. Sebaliknya, $2 < 3$ dan $2^2 < 3^2$. Jika kita bekerja dengan bilangan-bilangan taknegatif, maka $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$. Salah satu varian dari bentuk ini adalah

$$\boxed{|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2}$$

Untuk bukti fakta ini, lihat Soal 29.

CONTOH 6. Selesaikan ketaksamaan $|3x + 1| < 2|x - 6|$.

Penyelesaian. Ketaksamaan ini lebih sukar diselesaikan dibandingkan contoh sebelumnya, karena terdapat dua himpunan tanda nilai mutlak. Kita dapat bebas dari keduanya dengan memakai hasil dalam kotak yang terakhir.

$$\begin{aligned} |3x+1| < 2|x-6| &\Leftrightarrow |3x+1| < |2x-12| \\ &\Leftrightarrow (3x+1)^2 < (2x-12)^2 \\ &\Leftrightarrow 9x^2+6x+1 < 4x^2-48x+144 \\ &\Leftrightarrow 5x^2+54x-143 < 0 \\ &\Leftrightarrow (5x-11)(x+13) < 0 \end{aligned}$$

Titik-titik pemecah untuk ketaksamaan kuadrat ini adalah -13 dan $\frac{11}{5}$; titik-titik ini membagi garis riil menjadi tiga selang $(-\infty, -13)$ $(-13, \frac{11}{5})$, dan $(\frac{11}{5}, \infty)$. Bilamana kita memakai titik-titik uji -14, 0, dan 3, kita hanya menemukan titik-titik di dalam $(-13, \frac{11}{5})$ yang memenuhi ketaksamaan tersebut. ■

SOAL-SOAL 1.4

Dalam Soal-soal 1-12, carilah himpunan penyelesaian dari ketaksamaan yang diberikan (lihat Contoh 1 dan 2).

1. $|x+1| < 4$
2. $|x-2| < 5$
3. $|3x+4| < 8$
4. $|2x-7| < 3$
5. $\left|\frac{x}{3} - 2\right| \le 6$
6. $\left|\frac{3x}{5} + 1\right| \le 4$
7. $|2x-7| > 3$
8. $|5x-6| > 1$
9. $|4x+2| \ge 10$
10. $\left|\frac{x}{2} + 7\right| \ge 2$
11. $\left|2 + \frac{5}{x}\right| > 1$
12. $\left|\frac{1}{x} - 3\right| > 6$

Dalam Soal-soal 13-16, selesaikan ketaksamaan kuadrat yang diberikan dengan menggunakan rumus kuadrat (lihat Contoh 5).

13. $2x^2 - 5x - 4 \le 0$
14. $3x^2 + x - 1 > 0$
15. $4x^2 + x - 2 > 0$
16. $x^2 + 2x - 5 < 0$

Dalam Soal-soal 17-20, buktikan bahwa implikasi yang ditunjukkan adalah benar (lihat Contoh 3).

17. $|x-3| < 0{,}5 \Rightarrow |5x-15| < 2{,}5$
18. $|x+2| < 0{,}3 \Rightarrow |4x+8| < 1{,}2$

19. $|x-2|<\frac{\varepsilon}{6} \Rightarrow |6x-12|<\varepsilon$

20. $|x+4|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x+8|<\varepsilon$

Dalam Soal-soal 21-24, carilah δ (tergantung pada ε) sedemikian sehingga implikasi yang diberikan adalah benar (lihat Contoh 4).

21. $|x-5|<\delta \Rightarrow |3x-15|<\varepsilon$

22. $|x-2|<\delta \Rightarrow |4x-8|<\varepsilon$

23. $|x+6|<\delta \Rightarrow |6x+36|<\varepsilon$

24. $|x+5|<\delta \Rightarrow |5x+25|<\varepsilon$

Dalam Soal-soal 25-28, selesaikanlah ketaksamaan-ketaksamaan tersebut (lihat Contoh 6).

25. $|x-2|<3|x+7|$

26. $|2x-5|<|x+4|$

27. $2|2x-3|<|x+10|$

28. $|3x-1|<2|x+6|$

29. Buktikan $|x|<|y| \Leftrightarrow x^2<y^2$ dengan memberikan alasan untuk tiap langkah di bawah.

$$\begin{aligned}|x|<|y| &\Rightarrow |x||x| \le |x||y|\\ &\Rightarrow |x|^2 < |y|^2\\ &\Rightarrow x^2 < y^2\end{aligned}$$

dan $|x||y|<|y||y|$

Sebaliknya,

$$\begin{aligned}x^2<y^2 &\Rightarrow |x|^2 < |y|^2\\ &\Rightarrow |x|^2-|y|^2 < 0\\ &\Rightarrow (|x|-|y|)(|x|+|y|)<0\\ &\Rightarrow |x|-|y| < 0\\ &\Rightarrow |x| < |y|\end{aligned}$$

30. Gunakanlah hasil Soal 29 untuk membuktikan bahwa

$$0<a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$$

31. Gunakan ketaksamaan segitiga untuk memperlihatkan tiap ketaksamaan berikut.

(a) $|a-b| \le |a|+|b|$
(b) $|a-b| \ge |a|-|b|$
(c) $|a+b+c| \le |a|+|b|+|c|$

32. Gunakan ketaksamaan segitiga dan fakta bahwa $0<|a|<|b| \Rightarrow 1/|b|<1/|a|$ untuk mengembangkan rangkaian ketaksamaan berikut

$$\left|\frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{|x|+2}\right| \le \frac{1}{x^2+3}+\frac{1}{|x|+2} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

33. Buktikan bahwa (lihat Soal 32).

$$\left|\frac{x-2}{x^2+9}\right| \le \frac{|x|+2}{9}$$

34. Buktikan bahwa

$$|x| \le 2 \Rightarrow \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \le 15$$

35. Buktikan bahwa

$$|x| \le 1 \Rightarrow |x^4+\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{8}x+\tfrac{1}{16}|<2$$

36. Buktikan masing-masing yang berikut.

(a) $x<x^2$ untuk $x<0$ atau $x>1$
(b) $x^2<x$ untuk $0<x<1$

37. Buktikan $a \ne 0 \Rightarrow a^2+1/a^2 \ge 2$. *Petunjuk:* Pandang $(a-1/a)^2$.

38. Bilangan $\frac{1}{2}(a+b)$ dinamakan rata-rata, atau **nilai rata-rata aritmetis** antara a dan b. Tunjukkanlah bahwa nilai rata-rata aritmetis dari dua bilangan ada di antara kedua bilangan itu, dengan membuktikan bahwa

$$a<b \Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b$$

39. Bilangan $\sqrt{ab}$ dinamakan **nilai rata-rata geometris** dari dua bilangan positif a dan b. Buktikan bahwa

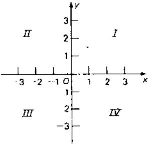
$$0<a<b \Rightarrow a<\sqrt{ab}<b$$

40. Untuk dua bilangan positif a dan b, buktikan bahwa $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$. Ini merupakan bentuk paling sederhana dari ketaksamaan yang sangat dikenal dengan nama: **ketaksamaan nilai rata-rata geometris – nilai rata-rata aritmetis.**

41. Tunjukkan bahwa di antara semua segi empat dengan keliling p, bujur sangkar memiliki luas yang paling besar. *Petunjuk:* Bila a dan b merupakan panjang sisi-sisi suatu segi empat dengan keliling p, maka luasnya ab, dan untuk bujur sangkar luasnya adalah $a^2=[(a+b)/2]^2$. Sekarang lihat Soal 40.

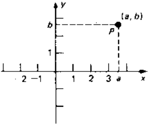
1.5 Sistem Koordinat Persegi-panjang

Dua orang Perancis telah berjasa untuk gagasan tentang sistem koordinat. Pierre de Fermat adalah seorang pengacara yang menggemari matematika. Pada tahun 1629, ia menulis sebuah makalah yang pada dasarnya menggunakan koordinat untuk memerikan titik-titik dan kurva-kurva. René Descartes adalah seorang ahli filsafat yang berpikir bahwa matematika dapat membuka kunci rahasia alam semesta. Ia menerbitkan *La Geometrie* pada tahun 1637. Buku itu sangat terkenal dan walaupun memang menekankan peranan aljabar dalam memecahkan masalah-masalah geometri, orang hanya menjumpai suatu petunjuk tentang koordinat di sana. Berdasarkan siapa yang mempunyai gagasan pertama kali lebih gamblang, Fermat sepantasnya memperoleh pengakuan yang utama. Sejarah dapat merupakan teman yang plin-plan: koordinat dikenal sebagai koordinat Cartesius, yang dinamakan menurut nama René Descartes.



GAMBAR 1

KOORDINAT CARTESIUS Dalam bidang, gambarkanlah dua garis riil, satu mendatar dan lainnya tegak, sedemikian sehingga keduanya berpotongan pada titik-titik nol dari kedua garis tersebut. Dua garis itu dinamakan **sumbu-sumbu koordinat**; perpotongannya diberi label O dan disebut **titik asal.** Menurut perjanjian, garis yang mendatar dinamakan sumbu x dan garis yang tegak dinamakan sumbu y. Setengah bagian positif dari sumbu x adalah ke kanan; setengah bagian positif dari sumbu y adalah ke atas. Sumbu-sumbu koordinat membagi bidang menjadi empat daerah, disebut **kuadran-kuadran**, yang diberi label I, II, III, dan IV, seperti diperlihatkan dalam Gambar 1.

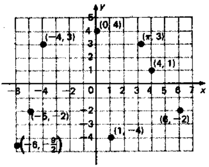


GAMBAR 2

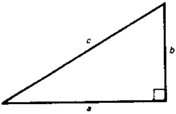
Tiap titik P pada bidang sekarang dapat dinyatakan dengan sepasang bilangan, yang dinamakan **koordinat-koordinat Cartesiusnya.** Jika garis-garis mendatar dan tegak yang melalui P masing-masing memotong sumbu x dan sumbu y di a dan b maka P mempunyai koordinat (a,b) (lihat Gambar 2). Kita sebut (a, b) suatu **pasangan terurut** bilangan-bilangan karena akan berbeda jika urutannya dibalik. Bilangan pertama a adalah **koordinat** x (atau absis); bilangan yang kedua b adalah **koordinat** y (atau ordinat).

Sebaliknya, ambil sebarang pasangan terurut (a,b) bilangan-bilangan riil. Garis tegak melalui a pada sumbu x dan garis mendatar melalui b pada sumbu y bertemu di titik P, yang koordinat-koordinatnya adalah (a,b).

Bayangkanlah dengan cara ini: Koordinat-koordinat suatu titik adalah alamat titik itu. Jika anda telah menemukan sebuah rumah (atau sebuah titik), anda dapat membaca alamatnya. Sebaliknya, jika anda mengetahui alamat sebuah rumah (atau sebuah titik), anda selalu dapat melokasikannya. Dalam Gambar 3, kita telah memperlihatkan koordinat-koordinat beberapa titik.



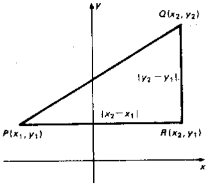
GAMBAR 3



GAMBAR 4

RUMUS JARAK Dengan menggunakan koordinat, kita dapat memperkenalkan sebuah rumus sederhana untuk jarak antara dua titik pada bidang. Ini didasarkan pada **teorema Pythagoras**, yang mengatakan jika a dan b merupakan ukuran dua kali suatu segitiga siku-siku dan c merupakan ukuran sisi miringnya (Gambar 4) maka

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



GAMBAR 5

Sebaliknya, hubungan antara tiga sisi segitiga ini hanya berlaku untuk segitiga siku-siku.

Sekarang pandang dua titik P dan Q sebarang, masing-masing dengan koordinat-koordinat (x_1, y_1) dan (x_2, y_2). Bersama dengan R – titik dengan koordinat-koordinat (x_2, y_1) – P dan Q adalah titik-titik sudut sebuah segitiga siku-siku (Gambar 5). Panjang PR dan RQ masing-masing $|x_2 - x_1|$ dan $|y_2 - y_1|$. Bilamana **teorema Pythagoras** diterapkan dan diambil akar kuadrat utama dari kedua ruas maka diperoleh ungkapan berikut untuk $d(P,Q)$, jarak (takberarah) antara P dan Q.

$$\boxed{d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ini disebut **rumus jarak**.

CONTOH 1. Carilah jarak antara

(a) $P(-2, 3)$ dan $Q(4, -1)$
(b) $P(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ dan $Q(\pi, \pi)$

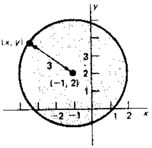
Penyelesaian

(a) $d(P, Q) = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} \approx 7{,}21$

(b) $d(P, Q) = \sqrt{(\pi - \sqrt{2})^2 + (\pi - \sqrt{3})^2} \approx \sqrt{4{,}971} \approx 2{,}23$ ■

Rumus tetap berlaku walaupun dua titik tersebut terletak pada garis mendatar atau garis tegak yang sama. Jadi, jarak antara $P(-2,2)$ dan $Q(6,2)$ adalah

$$\sqrt{(-2-6)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{64} = 8$$



GAMBAR 6

PERSAMAAN LINGKARAN Dari rumus jarak ke persamaan suatu lingkaran hanyalah sebuah langkah kecil. **Lingkaran** adalah himpunan titik-titik yang terletak pada suatu jarak tetap (jari-jari) dari suatu titik tetap (pusat). Misalnya, pandang lingkaran dengan jari-jari 3 berpusat di $(-1,2)$ (Gambar 6). Andaikan (x,y) menyatakan titik sebarang pada lingkaran ini. Menurut rumus jarak,

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = 3$$

Bilamana kedua ruas dikuadratkan, kita peroleh

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

yang disebut persamaan dari lingkaran ini.

Secara lebih umum, lingkaran berjari-jari r dan pusat (h,k) mempunyai persamaan

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2}$$

Ini disebut **persamaan baku sebuah lingkaran.**

CONTOH 2. Carilah persamaan lingkaran berjari-jari 5 dan pusat $(1, -5)$. Cari juga koordinat-koordinat y dari dua titik pada lingkaran ini dengan koordinat x adalah 2.

Penyelesaian. Persamaan yang diinginkan adalah

$$(x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$$

Untuk memenuhi tugas yang kedua, kita masukkan $x = 2$ dalam persamaan dan selesaikan untuk y.

$$\begin{aligned}(2-1)^2 + (y+5)^2 &= 25\\ (y+5)^2 &= 24\\ y+5 &= \pm\sqrt{24}\\ y &= -5 \pm \sqrt{24} = -5 \pm 2\sqrt{6}\end{aligned}$$ ■

Jika dua kuadrat pada persamaan dalam kotak diuraikan dan konstantanya digabungkan, persamaan akan berbentuk

$$x^2 + ax + y^2 + by = c$$

Ini mengundang pertanyaan apakah setiap persamaan dari bentuk yang belakangan merupakan persamaan suatu lingkaran. Jawabnya adalah ya (dengan suatu perkecualian yang jelas), seperti yang terlihat dalam contoh berikut.

Dalam contoh ini, diperlukan untuk *melengkapi kuadrat,* suatu proses penting dalam banyak hal. Untuk melengkapi kuadrat dari $x^2 \pm ax$, tambahkan $(a/2)^2$. Sehingga

$$x^2 - 12x + 6^2 = (x - 6)^2$$

$$x^2 + \frac{2}{5}x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{5}\right)^2$$

CONTOH 3. Buktikan bahwa persamaan

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y = -6$$

merupakan sebuah lingkaran, dan tentukanlah pusat serta jari-jarinya.

Penyelesaian. Kita selesaikan kuadrat untuk ungkapan baik dalam x maupun y dengan menambahkan bilangan yang sama pada kedua ruas persamaan.

$$(x^2 - 2x \quad) + (y^2 + 6y \quad) = -6$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 6y + 9) = -6 + 1 + 9$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$$

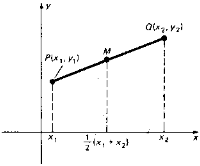
Persamaan yang terakhir adalah dalam bentuk baku. Ini merupakan persamaan lingkaran dengan pusat $(1, -3)$ dan jari-jari 2. Jika sebagai hasil proses ini, suatu bilangan negatif muncul di ruas kanan, persamaan tidak akan menggambarkan suatu kurva apa pun. Jika muncul nol, persamaan akan menggambarkan titik tunggal $(1, -3)$. ■

RUMUS TITIK TENGAH Ada dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ di mana $x_1 \leqslant x_2$, lihat Gambar 7:

$$x_1 + \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1) = x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_1$$

$$= \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$



GAMBAR 7

Ini berarti bahwa titik $(x_1 + x_2)/2$ berada di tengah-tengah antara x_1 dan x_2 pada sumbu x, dengan demikian titik tengah M dari potongan garis PQ memiliki absis $(x_1 + x_2)/2$ dan dengan cara yang sama dapat kita buktikan bahwa $(y_1 + y_2)/2$ adalah merupakan koordinat dari M. Maka kita peroleh hasil sebagai berikut:

Titik tengah dari potongan garis PQ dengan $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ adalah

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

CONTOH 4. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai potongan garis dari (1,3) ke (7,11) sebagai garis tengahnya.

Penyelesaian. Pusat lingkaran terletak di tengah-tengah garis tengahnya sehingga titik pusat mempunyai koordinat $(1 + 7)/2 = 4$ dan $(3 + 11)/2 = 7$. Panjang garis tengah, diperoleh dari rumus jarak sebagai berikut

$$[(7-1)^2 + (a1-3)^2]^{1/2} = [36 + 64]^{1/2} = 10$$

berarti jari-jari lingkaran itu adalah 5. Jadi persamaan lingkaran:

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 25$$ ■

SOAL-SOAL 1.5

Dalam Soal-soal 1-6, rajahlah titik-titik yang diberikan dalam bidang koordinat dan kemudian carilah jarak antara titik-titik tersebut.

1. $(2, -1), (5, 3)$ 2. $(-2, 1), (7, 13)$

3. $(4, 2), (2, 4)$ 4. $(-1, 5), (6, 3)$

C 5. $(1{,}232; 4{,}153), (\pi, \sqrt{2})$

C 6. $(2{,}71; -3{,}42), (5{,}16; 4{,}33)$

7. Buktikanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (5,3), (−2,4), dan (10,8) adalah samakaki.

8. Tunjukkanlah bahwa segitiga yang titik-titik sudutnya adalah (2, −4), (4,0), dan (8, −2) adalah siku-siku.

9. Titik-titik (3, −1) dan (3,3) adalah titik-titik sudut suatu bujur sangkar. Berikan tiga pasang titik-titik sudut lain yang mungkin.

10. Carilah titik pada sumbu x- yang berjarak sama dari (3,1) dan (6,4).

11. Tentukan jarak antara (−2,3) dengan titik tengah potongan garis yang digabungkan (−2, −2) dan (4,3).

12. Carilah panjang ruas garis yang menghubungkan titik-titik tengah ruas-ruas AB dan CD, di mana $A = (1,3)$, $B = (2,6)$, $C = (4,7)$, dan $D = (3,4)$.

Dalam Soal-soal 13-18, carilah persamaan lingkaran yang memenuhi persyaratan yang diberikan.

13. Pusat (1, −2), jari-jari 6.

14. Pusat (−3, 4), jari-jari 8.

15. Pusat (2, −1), melalui (5, 3).

16. Pusat (4, 3), melalui (6, 2).

17. Garis tengah AB, dengan $A = (-1,2)$ dan $B = (3,8)$.

18. Pusat (3,4) dan menyinggung sumbu x.

19. Cari koordinat y dari dua titik pada lingkaran dari Soal 13 dengan koordinat x adalah 3 (lihat Contoh 2).

20. Cari koordinat x dari dua titik pada lingkaran dari Soal 14 dengan koordinat y adalah 8.

Dalam Soal-soal 21-26, cari pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan yang diberikan (lihat Contoh 3).

21. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 25 = 0$

22. $x^2 + y^2 - 6y = 16$

23. $x^2 + y^2 - 12x + 35 = 0$

24. $x^2 + y^2 - 10x + 10y = 0$

25. $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$

26. $3x^2 + 3y^2 - 2x + 4y = \frac{20}{3}$

27. Titik-titik (2,3), (6,3), (6, −1), dan (2, −1) adalah sudut-sudut suatu bujur sangkar. Carilah persamaan-persamaan lingkaran dalam dan luar.

28. Sebuah tali secara ketat mengelilingi dua lingkaran dengan persamaan-persamaan $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ dan $(x + 9)^2 + (y - 10)^2 = 16$. Berapakah panjang tali ini?

$\boxed{C}$ 29. Kota-kota di A, B, dan C merupakan titik-titik sudut sebuah segitiga siku-siku, dengan sudut siku-siku di titik sudut B. AB dan BC juga merupakan jalan, masing-masing dengan panjang 214 dan 179 mil. Sebuah pesawat terbang dapat menerbangi rute AC, yang bukan suatu jalan. Biaya mengirim suatu barang tertentu dengan truk \$3,71 tiap mil dan dengan pesawat terbang \$4,82 tiap mil. Putuskan apakah lebih murah mengirim barang tersebut dari A ke C dengan truk atau pesawat terbang dan cari biaya total memakai metode yang lebih murah.

$\boxed{C}$ 30. Kota B berjarak 10 mil ke arah hilir dari kota A dan berseberangan dari sungai yang lebarnya ½ mil. Mary Crane akan lari dari kota A sepanjang sungai sejauh 6 mil, kemudian berenang secara diagonal ke kota B. Jika ia lari dengan kecepatan 8 mil/jam dan berenang dengan kecepatan 3 mil/jam, berapa lama waktu yang ditempuhnya dari kota A ke kota B? Anggap laju arus dapat diabaikan.

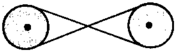
31. Buktikan bahwa titik tengah sisi miring sebarang segitiga siku-siku berjarak sama dari ketiga titik-titik sudutnya.

32. Cari persamaan lingkaran yang melingkupi segitiga siku-siku yang titik-titik sudutnya adalah (0,0), (8,0), dan (0,6).

33. Perlihatkan bahwa dua lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 11 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 20x - 12y + 72 = 0$ tidak berpotongan. *Petunjuk:* Cari jarak antara pusat-pusatnya.

34. Bagaimanakah hubungan antara a, b dan c yang harus dipenuhi bila $a^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ merupakan persamaan lingkaran?

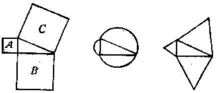
$\boxed{C}$ 35. Tentukan panjang dari tali bersilang pada Gambar 8 yang dipasang erat di sekeliling lingkaran $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 9$ dan $(x-10)^2 + (y-8)^2 = 9$. *Catatan:* Diperlukan sedikit pengertian trigonometri untuk menyelesaikan soal ini.



GAMBAR 8

36. Tunjukkan bahwa himpunan titik-titik yang jaraknya ke (3,4) dua kali lebih besar dari jarak ke (1,1) membentuk suatu lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran tersebut.

37. Teorema Pythagoras menyebutkan bahwa luas A, B dan C dari segi empat-segi empat pada Gambar 9 memenuhi $A + B = C$. Tunjukkan bahwa setengah lingkaran dan segitiga sama sisi juga memenuhi persamaan tersebut.

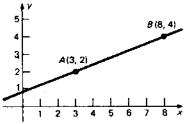


GAMBAR 9

38. Diketahui sebuah lingkaran C dan sebuah titik P yang berada di luar lingkaran tersebut. Apabila potongan garis PT menyinggung C di T dan ada garis lain yang melalui P dan pusat C memotong C pada M dan N. Tunjukkan bahwa $(PM)(PN) = (PT)^2$.

1.6 Garis Lurus

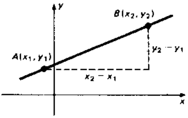
Dalam banyak hal garis lurus adalah yang paling sederhana dari semua kurva. Dianggap bahwa semua pembaca memahami dengan baik mengenai konsep ini dengan melihat pada sebuah tali tegang atau mengamati sepanjang sisi sebuah penggaris. Dalam banyak kasus, marilah kita sepakati bahwa dua titik – misalnya, $A(3,2)$ dan $B(8,4)$ yang diperlihatkan dalam Gambar 1 – menentukan sebuah garis unik yang melalui mereka. Dan mulai saat ini, kita gunakan kata garis sebagai kata lain untuk *garis lurus.*



GAMBAR 1

Sebuah garis adalah sebuah obyek geometri. Bila ditempatkan pada suatu koordinat bidang, garis ini tentulah mempunyai persamaan, sebagaimana halnya lingkaran. Bagaimana kita mencari persamaan suatu garis? Untuk menjawabnya, kita memerlukan pengertian yang mendasar tentang kemiringan*.

KEMIRINGAN GARIS Pandang garis dalam Gambar 1. Dari titik A ke titik B, terdapat suatu **kenaikan** (perubahan tegak) 2 satuan dan suatu **run** (perubahan mendatar) 5 satuan. Dikatakan bahwa garis itu mempunyai tanjakan $\frac{2}{5}$. Umumnya (Gambar 2) untuk sebuah garis melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$, dengan $x_1 \neq x_2$, **kemiringan** m dari garis itu didefinisikan oleh

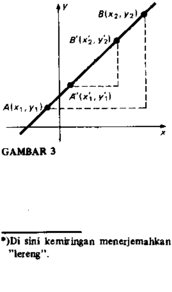


GAMBAR 2

$$\boxed{m = \frac{\text{kenaikan}}{\text{run}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Anda tentu segera bertanya. Sebuah garis mempunyai banyak titik. Apakah nilai yang diperoleh untuk kemiringan tergantung kepada pasangan mana yang dipakai untuk A dan B? Segitiga-segitiga sebangun dalam Gambar 3 memperlihatkan bahwa

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



GAMBAR 3

Jadi, titik-titik A' dan B' akan memenuhi sebagaimana halnya A dan B. Tidak menjadi masalah apakah A terletak di kiri atau di kanan B, karena

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

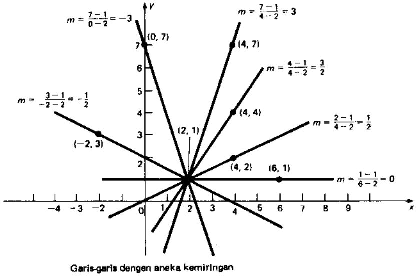
*)Di sini kemiringan menerjemahkan pengertian "slope"; para penulis lain menggunakan "tanjakan", "lereng".

Yang pokok adalah bahwa koordinat-koordinat dikurangkan dalam urutan sama di pembilang dan penyebut.

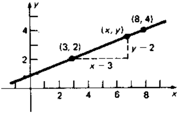
Kemiringan m adalah ukuran kecuraman suatu garis, seperti digambarkan pada Gambar 4. Perhatikan bahwa garis mendatar mempunyai kemiringan nol, garis yang naik ke kanan mempunyai kemiringan positif, dan garis yang jatuh ke kanan mempunyai kemiringan negatif. Semakin besar kemiringannya, semakin curam garis tersebut. Konsep kemiringan untuk garis tegak tidak mempunyai arti, karena akan menyangkut pembagian oleh nol. Karenanya, kemiringan untuk garis tegak dibiarkan tak terdefinisi.

BENTUK KEMIRINGAN-TITIK Pandang lagi garis pada awal pembicaraan kita; ini digambar-ulang dalam Gambar 5. Kita ketahui bahwa garis ini:

1. melalui (3, 2);
2. mempunyai kemiringan $\frac{2}{5}$.



GAMBAR 4



GAMBAR 5

Ambillah sebarang titik pada garis itu, misalnya titik dengan koordinat (x, y). Jika kita gunakan titik ini dan titik-titik (3, 2) untuk mengukur kemiringannya, kita pasti memperoleh $\frac{2}{5}$ – yaitu,

$$\frac{y-2}{x-3} = \frac{2}{5}$$

atau, setelah dikalikan dengan $x - 3$,

$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Perhatikan bahwa persamaan yang terakhir ini dipenuhi oleh semua titik pada garis, bahkan oleh (3, 2). Lebih lanjut, tak satu pun titik yang tidak terletak pada garis tersebut dapat memenuhi persamaan ini.

Apa yang baru saja dilakukan dalam contoh kita, tentunya dapat dilakukan secara umum. Garis yang melalui titik (tetap) (x_1, y_1) dengan kemiringan m mempunyai persamaan

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Ini disebut bentuk **kemiringan-titik** dari persamaan sebuah garis.

Pandang sekali lagi garis dari contoh kita. Garis itu melalui (8,4) seperti halnya (3,2). Jika dipakai (8,4) sebagai (x_1, y_1) kita peroleh persamaan

$$y - 4 = \tfrac{2}{5}(x - 8)$$

yang kelihatannya berbeda dari

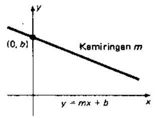
$$y - 2 = \tfrac{2}{5}(x - 3)$$

Namun, keduanya dapat disederhanakan menjadi $5y - 2x = 4$; keduanya sama.

CONTOH 1. Cari persamaan garis yang melalui (−4,2) dan (6,−1).

Penyelesaian. Kemiringan m adalah $(-1 - 2)/(6 + 4) = -\frac{3}{10}$. Sehingga, dengan menggunakan (−4,2) sebagai titik tetap, kita dapatkan persamaan

$$y - 2 = -\tfrac{3}{10}(x + 4) \qquad \blacksquare$$



GAMBAR 6

BENTUK KEMIRINGAN PERPOTONGAN. Persamaan suatu garis dapat dinyatakan dalam bermacam-macam bentuk. Andaikan diberikan kemiringan m untuk suatu garis dan b perpotongan sumbu y (artinya), garis memotong sumbu y di $(0, b)$), seperti diperlihatkan dalam Gambar 6. Dengan memilih $(0, b)$ sebagai (x_1, y_1) dan menerapkan bentuk kemiringan-titik diperoleh

$$y - b = m(x - 0)$$

yang dapat ditulis-ukuran sebagai

$$\boxed{y = mx + b}$$

Yang belakangan ini disebut bentuk **kemiringan perpotongan**.

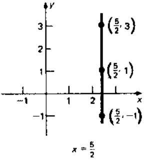
Apa menariknya hal ini, tanya anda? Setiap kali melihat persamaan yang dituliskan seperti ini, kita mengenalinya sebagai garis dan dengan segera dapat mengetahui kemiringan dan perpotongan y-nya. Misalnya, lihat persamaan

$$3x - 2y + 4 = 0$$

Jika diselesaikan untuk y, diperoleh

$$y = \tfrac{3}{2}x + 2$$

Ini adalah persamaan garis dengan kemiringan $\frac{3}{2}$ dan perpotongan–y 2.



GAMBAR 7

PERSAMAAN GARIS VERTIKAL Garis-garis vertikal tidak sesuai dalam pembahasan di atas; garis seperti ini tidak mempunyai kemiringan. Tetapi tetap mempunyai persamaan, yang sangat sederhana. Garis dalam Gambar 7 mempunyai persamaan $x = \frac{5}{2}$, karena sebuah titik berada pada garis jika dan hanya jika memenuhi persamaan ini. Persamaan sebarang garis tegak dapat dilukiskan dalam **bentuk**

$$\boxed{x = k}$$

di mana k adalah suatu konstanta. Patut dicatat bahwa **persamaan suatu garis vertikal dapat dituliskan dalam bentuk $y = k$.**

BENTUK $Ax + By + C = 0$ Akan sangat menarik untuk mempunyai suatu bentuk yang meliput semua garis, termasuk garis-garis tegak. Ambillah misalnya,

(1) $y - 2 = -4(x + 2)$

(2) $y = 5x - 3$

(3) $x = 5$

Ini dapat ditulis-ulang (dengan memindahkan semuanya ke ruas kiri) sebagai berikut:

(1) $4x + y + 6 = 0$

(2) $-5x + y + 3 = 0$

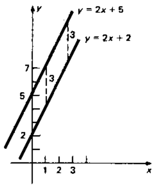
(3) $x + 0y - 5 = 0$

Semuanya berbentuk

$$\boxed{Ax + By + C = 0, \quad A \text{ dan } B \text{ keduanya tak } 0}$$

yang disebut **persamaan linear umum.** Hanya memerlukan pemikiran sekejap untuk melihat bahwa persamaan sebarang garis dapat dibuat dalam bentuk ini. Sebaliknya, grafik persamaan garis umum selalu berupa sebuah garis (lihat Soal 43).

GARIS-GARIS SEJAJAR Jika dua garis mempunyai kemiringan sama, maka keduanya sejajar. Jadi, $y = 2x + 2$ dan $y = 2x + 5$ merupakan garis-garis sejajar; keduanya mempunyai kemiringan 2. Garis yang kedua adalah 3 satuan di atas yang pertama untuk setiap nilai x (lihat Gambar 8).



GAMBAR 8

Demikian pula, garis-garis dengan persamaan $-2x + 3y + 12 = 0$ dan $4x - 6y = 5$ adalah sejajar. Untuk melihat ini, selesaikan persamaan-persamaan ini untuk y (yaitu, cari bentuk kemiringan-perpotongan); anda peroleh masing-masing: $y = \frac{2}{3}x - 4$ dan $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{6}$. Keduanya mempunyai kemiringan $\frac{2}{3}$; garis-garis ini sejajar.

Kita boleh meringkaskan dengan menyatakan bahwa *dua garis tak-vertikal adalah sejajar jika dan hanya jika keduanya mempunyai kemiringan yang sama.*

CONTOH 2. Carilah persamaan garis yang melalui (6,8), yang sejajar dengan garis yang mempunyai persamaan $3x - 5y = 11$.

Penyelesaian. Bilamana kita selesaikan $3x - 5y = 11$ untuk y, kita peroleh

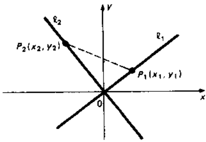
$$y = \tfrac{3}{5}x - \tfrac{11}{5}$$

dari mana terbaca kemiringan garis adalah $\frac{3}{5}$. Persamaan garis yang diinginkan adalah

$$y - 8 = \tfrac{3}{5}(x - 6)$$

atau, sama dengan $3x - 5y + 22 = 0$. ■

GARIS-GARIS TEGAKLURUS Apakah terdapat persyaratan kemiringan yang sederhana yang mencirikan garis-garis yang tegaklurus? Ya; *dua garis tak-vertikal saling tegaklurus jika dan hanya jika kemiringan keduanya saling berkebalikan negatif.* Untuk melihat mengapa ini benar, pandang dua garis tak-vertikal l_1 dan l_2. Tanpa mengurangi generalitas, kita dapat menganggapnya berpotongan di titik asal karena jika tidak demikian, kita dapat menggesernya sedemikian rupa sehingga tidak mengubah kemiringannya. Andaikan P_1 (x_1, y_1) suatu titik pada l_1 dan P_2 (x_2, y_2) titik pada l_2, seperti diperlihatkan dalam Gambar 9. Menurut Teorema Pythagoras dan kebalikannya (Pasal 1.5) $P_1 OP_2$ merupakan sudut siku-siku jika dan hanya jika



GAMBAR 9

$$[d(P_1, O)]^2 + [d(P_2, O)]^2 = [d(P_1, P_2)]^2$$

yakni, jika dan hanya jika

$$(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Setelah penguraian dan penyederhanaan, persamaan ini menjadi $2x_1 x_2 + 2y_1 y_2 = 0$, atau

$$\frac{y_1}{x_1} = -\frac{x_2}{y_2}$$

Sekarang y_1/x_1 adalah kemiringan dari l_1, sedangkan y_2/x_2 adalah kemiringan dari l_2. Sehingga $P_1 OP_2$ adalah sudut siku-siku jika dan hanya jika kemiringan-kemiringan dua garis tersebut berbanding terbalik satu sama lain.

Garis-garis $y = \frac{3}{4}x$ dan $y = -\frac{4}{3}x$ saling tegaklurus. Demikian juga $2x - 3y = 5$ dan $3x + 2y = -4$, karena setelah menyelesaikan persamaan-persamaan ini untuk y, terlihat bahwa garis yang pertama mempunyai kemiringan $\frac{2}{3}$ dan yang kedua mempunyai kemiringan $-\frac{3}{2}$.

CONTOH 3. Carilah persamaan garis yang melalui titik potong garis-garis dengan persamaan $3x + 4y = 8$ dan $6x - 10y = 7$, yang tegak lurus dengan garis yang pertama.

Penyelesaian. Untuk mencari titik potong dua garis ini, persamaan yang pertama dikalikan -2 dan hasilnya ditambahkan pada persamaan yang kedua.

$$\begin{aligned} -6x - 8y &= -16 \\ 6x - 10y &= 7 \\ \hline -18y &= -9 \\ y &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $y = \frac{1}{2}$ dalam salah satu persamaan awal akan menghasilkan $x = 2$. Titik potongnya adalah $(2, \frac{1}{2})$.

Bilamana persamaan yang pertama diselesaikan untuk y (membuatnya dalam bentuk kemiringan-perpotongan), diperoleh $y = -\frac{3}{4}x + 2$. Garis yang tegaklurus padanya mempunyai kemiringan $\frac{4}{3}$. Persamaan garis yang diminta adalah

$$y - \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}(x - 2)$$

■

SOAL-SOAL 1.6

Dalam Soal-soal 1-8, cari kemiringan dari garis yang mengandung dua titik yang di berikan

1. (2, 3) dan (4, 8)
2. (4, 1) dan (8, 2)
3. $(-4, 2)$ dan (3, 0)
4. $(2, -4)$ dan $(0, -6)$
5. (3, 0) dan (0, 5)
6. $(-6, 0)$ dan (0, 6)
7. [C] $(-1{,}732; 5{,}014)$ dan $(4{,}315; 6{,}175)$
8. [C] $(\pi, \sqrt{3})$ dan $(1{,}642, \sqrt{2})$

Dalam Soal-soal 9-16, cari sebuah persamaan untuk tiap garis. Kemudian tuliskan jawab anda dalam bentuk $Ax + By + C = 0$.

9. Melalui (2,3) dengan kemiringan 4.
10. Melalui $(3, -4)$ dengan kemiringan -2.

11. Dengan perpotongan-y 4 dan kemiringan -2.
12. Dengan perpotongan-y 5 dan kemiringan -2.
13. Melalui (2,3) dan (4,8).
14. Melalui (4,1) dan (8,2).
15. Melalui (2,−3) dan (2,5).
16. Melalui (−5,0) dan (−5,4).

Dalam Soal-soal 17-20, carilah kemiringan dan perpotongan-y untuk tiap garis.

17. $3y = 2x - 4$
18. $2y = 5x + 2$
19. $2x + 3y = 6$
20. $4x + 5y = -20$

21. Tuliskan persamaan garis melalui $(3, -3)$ yang:
(a) sejajar garis $y = 2x + 5$;
(b) tegaklurus garis $y = 2x + 5$;
(c) sejajar garis $2x + 3y = 6$;
(d) tegaklurus garis $2x + 3y = 6$;
(e) sejajar garis yang melalui $(-1,2)$ dan $(3,-1)$;
(f) sejajar garis $x = 8$;
(g) tegak lurus garis $x = 8$.

22. Cari nilai k untuk mana garis $4x + ky = 5$:
(a) melalui titik (2,1);
(b) sejajar sumbu y;
(c) sejajar garis $6x - 9y = 10$;
(d) mempunyai perpotongan-x dan y sama;
(e) tegaklurus pada garis $y - 2 = 2(x + 1)$.

23. Tuliskan persamaan garis yang melalui $(0-4)$ yang tegaklurus pada garis $y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 1)$.

24. Cari nilai k sedemikian sehingga garis $kx - 3y = 10$:
(a) sejajar garis $y = 2x + 4$;
(b) tegaklurus garis $y = 2x + 4$;
(c) tegaklurus garis $2x + 3y = 6$.

25. Apakah (3,9) terletak di atas atau di bawah garis $y = 3x - 1$?

26. Buktikan bahwa persamaan garis dengan perpotongan-x adalah $a \neq 0$ dan perpotongan-y adalah $b \neq 0$ adalah

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Dalam soal-soal 27-30, cari koordinat-koordinat titik potongnya. Kemudian tuliskan persamaan garis yang melalui titik tersebut tegaklurus pada garis yang dituliskan pertama (lihat Contoh 3).

27. $2x + 3y = 4$
$-3x + y = 5$

28. $4x - 5y = 8$
$2x + y = -10$

29. $3x - 4y = 5$
$2x + 3y = 9$

30. $5x - 2y = 5$
$2x + 3y = 6$

Dapat diperlihatkan bahwa jarak d dari titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Gunakan hasil ini untuk mencari jarak dari titik yang diberikan ke garis yang diberikan

31. $(-3, 2)$; $3x + 4y = 6$
32. $(4, -1)$; $2x - 2y + 4 = 0$
33. $(-2, -1)$; $5y = 12x + 1$
34. $(3, -1)$; $y = 2x - 5$

Dalam Soal 35 dan 36, cari jarak (tegaklurus) antara garis-garis sejajar yang diberikan. *Petunjuk:* Pertama cari sebuah titik pada salah satu garis.

35. $3x + 4y = 6$, $3x + 4y = 12$
36. $5x + 12y = 2$, $5x + 12y = 7$

37. Sebuah bulldozer bernilai $120.000 dan setiap tahun mengalami depresiasi sebesar 8% dari nilai awalnya. Cari sebuah rumus untuk V, yaitu nilai bulldozer setelah t tahun.

38. Grafik dari jawaban untuk Soal 37 berupa sebuah garis lurus. Berapa kemiringannya, dengan anggapan sumbu t- horisontal? Tafsirkan kemiringan tersebut.

39. Pengalaman menunjukkan bahwa produksi telur di daerah R tumbuh secara linear. Pada tahun 1960 sebanyak 700.000 peti, dan pada tahun 1970 sebanyak 820.000 peti. Tuliskan rumus untuk N, yaitu banyaknya peti telur yang diproduksi n tahun setelah 1960 dan gunakan rumus tersebut untuk meramalkan produksi telur pada tahun 2000.

40. Sebuah peralatan yang dibeli hari ini seharga \$80.000 akan mengalami depresiasi secara linear sampai suatu nilai sebagai besi tua seharga \$2000 setelah 20 tahun. Tuliskan rumus untuk V, yaitu nilainya setelah n tahun.

41. Andaikan bahwa laba P yang direalisasikan suatu perusahaan dalam menjual x butir suatu mata dagangan tertentu diberikan oleh $P = 450x - 2000$ dolar.
(a) Berapa nilai P bilamana $x = 0$. Apa artinya ini?
(b) Cari kemiringan dari grafik persamaan di atas. Kemiringan ini dinamakan **keuntungan marjinal.** Apa tafsiran ekonominya?

42. Biaya C untuk menghasilkan x butir suatu mata dagangan tertentu diberikan oleh $C = 0{,}75x + 200$ dolar. Tanjakan grafiknya dinamakan **biaya marjinal.** Cari tanjakan itu dan berikan tafsiran ekonominya.

43. Buktikan bahwa grafik dari $Ax + By + C = 0$ selalu berupa sebuah garis (asalkan A dan B keduanya tak 0). *Petunjuk:* Pandang dua kasus; (1) $B = 0$ dan (2) $B \neq 0$.

44. Cari persamaan garis yang melalui $(2,3)$ yang mempunyai perpotongan-x dan y sama. *Petunjuk:* Gunakan Soal 26.

45. Perlihatkan bahwa untuk tiap nilai k, persamaan

$$2x - y + 4 + k(x + 3y - 6) = 0$$

menyatakan sebuah garis yang melalui perpotongan dua garis $2x - y + 4 = 0$ dan $x + 3y - 6 = 0$. *Petunjuk:* Tidak perlu mencari titik potong (x_0, y_0).

46. Cari persamaan garis yang membagi dua ruas garis dari $(-2,1)$ ke $(4,-7)$ dan yang bersudut siku-siku terhadap ruas garis ini.

47. Pusat lingkaran luar suatu segitiga terletak pada garis pembagi dua tegaklurus dari sisi-sisi. Gunakan kenyataan ini untuk mencari pusat lingkaran luar dari segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(0,4)$, $(2,0)$, dan $(4,6)$.

48. Andaikata (a, b) terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Tunjukkan bahwa garis $ax + by = r^2$ menyinggung lingkaran pada (a, b).

49. Tentukan persamaan-persamaan dari dua garis singgung terhadap lingkaran $x^2 + y^2 = 36$ yang melalui $(12,0)$. *Petunjuk:* Lihat Soal 48.

50. Nyatakanlah jarak tegaklurus antara garis-garis sejajar $y = mx + b$ dan $y = mx$ dalam bentuk m, b dan B. *Petunjuk:* Jarak yang diperlukan adalah sama dengan jarak antara $y = mx$ dengan $y = mx + B - b$.

51. Tunjukkan bahwa garis yang melalui titik tengah dari dua sisi suatu segitiga, sejajar dengan sisi ke tiga. *Petunjuk:* Anda dapat memisalkan segitiganya mempunyai titik-titik sudut $(0,0)$, $(a, 0)$ dan (b, c).

52. Tunjukkan bahwa potongan garis yang menghubungkan titik tengah dari sisi-sisi yang berseberangan dari suatu segi empat membentuk suatu empat persegi panjang.

1.7 Grafik Persamaan

Penggunaan koordinat untuk titik-titik pada bidang memungkinkan kita untuk memerikan suatu kurva (obyek geometri) dengan memakai suatu persamaan (obyek aljabar). Kita melihat bagaimana ini dilakukan untuk lingkaran-lingkaran dan garis-garis dalam pasal sebelumnya. Sekarang kita ingin memandang proses kebalikannya: yaitu menggambarkan suatu persamaan. **Grafik suatu persamaan** dalam x dan y terdiri atas titik-titik di bidang yang koordinat-koordinat (x,y)-nya memenuhi persamaan – artinya, membuatnya suatu persamaan yang benar.

PROSEDUR PENGGAMBARAN GRAFIK Untuk menggambar suatu persamaan – misalnya, $y = 2x^3 - x + 19$ – kita ikuti prosedur sederhana tiga langkah:

Langkah 1 Dapatkan koordinat-koordinat beberapa titik yang memenuhi persamaan.
Langkah 2 Rajah titik-titik tersebut di bidang.
Langkah 3 Hubungkan titik-titik tersebut dengan sebuah kurva mulus.

Cara terbaik untuk melakukan Langkah 1 adalah membuat sebuah tabel nilai-nilai. Berikan nilai-nilai pada salah satu variabel, seperti misalnya x, dan tentukan nilai-nilai yang berpadanan dari lainnya, dengan mendaftarkan hasil-hasil yang tersusun dalam tabel.

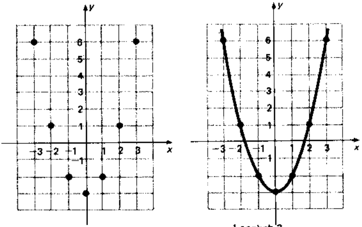
CONTOH 1 Gambar grafik persamaan $y = x^2 - 3$.

Penyelesaian. Prosedur tiga langkah diperlihatkan dalam Gambar 1.

$y = x^2 - 3$

x	y
−3	6
−2	1
−1	−2
0	−3
1	−2
2	1
3	6

Langkah 1
Buat sebuah daftar nilai



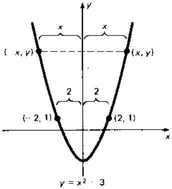
Langkah 2
Rajah titik-titik itu

Langkah 3
Hubungkan titik-titik itu dengan sebuah kurva mulus

GAMBAR 1 ■

Tentu saja anda memerlukan akal sehat dan bahkan sedikit keyakinan. Pada waktu anda menghubungkan titik-titik yang telah anda rajah dengan sebuah kurva mulus, anda mengasumsikan bahwa kurva berkelakuan manis diantara titik-titik yang beruntun, yang merupakan keyakinan. Itulah sebabnya kenapa anda harus merajah titik-titik secukupnya sehingga garis bentuk kurva kelihatan amat jelas; makin banyak titik yang anda rajah, makin sedikit keyakinan yang anda perlukan. Selain itu, anda juga harus mengenali bahwa jarang sekali dapat memperagakan keseluruhan kurva. Dalam contoh kita, kurva mempunyai lengan panjang tak terhingga, membuka dengan semakin lebar. Tetapi grafik kita sudah memperlihatkan segi-seginya yang perlu. Inilah tujuan kita dalam penggambaran grafik: Perlihatkan grafik secukupnya sehingga segi-seginya yang perlu dapat terlihat.

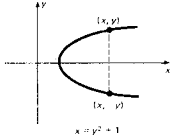
KESIMETRIAN GRAFIK Kita dapat menghemat kerja dan juga menggambarkan grafik yang lebih tepat jika kita dapat mengenali simetri tertentu dari grafik tersebut dengan memeriksa persamaan yang berpadanan. Lihat grafik $y = x^2 - 3$, yang digambar di atas dan



GAMBAR 2

digambar lagi dalam Gambar 2. Jika bidang koordinat dilipat sepanjang sumbu y, kedua cabang akan berimpit. Misalnya, (3, 6) akan berimpit dengan (−3,6), (2,1) akan berimpit dengan (−2,1) dan secara lebih umum, (x, y) akan berimpit dengan $(-x, y)$. Secara aljabar ini berpadanan dengan kenyataan bahwa penggantian x oleh $-x$ dalam persamaan $y = x^2 - 3$ menghasilkan persamaan yang setara.

Ambil sebarang grafik. Grafik itu **simetris terhadap sumbu** y bila (x, y) maupun $(-x, y)$ terletak pada grafik itu (Gambar 2). Serupa dengan itu, maka grafik dikatakan **simetris terhadap sumbu** y bila (x, y) maupun $(x, -y)$ berada pada grafik itu (Gambar 3). Demikian pula, suatu grafik dikatakan **simetris terhadap titik asal** bila baik (x, y) maupun $(-x, -y)$ terletak pada grafik itu (lihat Contoh 2).



GAMBAR 3

Dalam bentuk persamaan-persamaan, kita memiliki tiga pengujian sederhana.

Grafik dari suatu persamaan adalah:

1. **simetris terhadap sumbu y bila penggantian x dengan $-x$ memberikan persamaan yang setara (sebagai contoh $y = x^2$).**
2. **simetris terhadap sumbu x bila penggantian y dengan $-y$ memberikan persamaan yang setara (sebagai contoh $y = 1 + y^2$).**
3. **simetris terhadap titik asal bila penggantian x dengan $-x$ dan y dengan $-y$ memberikan persamaan yang setara ($y = x^3$ merupakan contoh yang bagus karena $y = (-x)^3$ setara dengan $y = x^3$).**

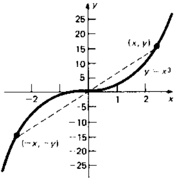
CONTOH 2. Sketsakan grafik dari $y = x^3$.

Penyelesaian. Seperti ditunjukkan di atas, kita catat bahwa grafik akan simetri terhadap titik asal. Sehingga kita hanya perlu memperoleh tabel nilai untuk x yang taknegatif; kita dapat mencari titik yang sebanding melalui simetri (Gambar 4). ■

Dalam menggambar grafik $y = x^3$, kita memakai skala yang lebih kecil pada sumbu y daripada sumbu x. Ini memungkinkan untuk memperlihatkan porsi grafik yang lebih besar (juga mengubah bentuk grafik dengan mempergemuknya). Kami sarankan agar se-

$y = x^3$

x	y
0	0
1	1
2	8
3	27
4	64



Simetri terhadap titik asal

GAMBAR 4

belum meletakkan skala pada kedua sumbu, anda seharusnya memeriksa tabel nilai anda. Pilih skala-skala sedemikian sehingga semua atau hampir semua titik-titik anda dapat dirajah dan tetap mempertahankan grafik anda berukuran wajar.

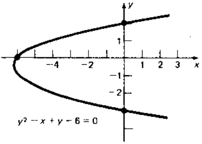
PERPOTONGAN Titik-titik di mana grafik suatu persamaan memotong kedua sumbu koordinat memainkan peranan penting dalam banyak hal. Misalnya, pandang

$$y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$$

Perhatikan bahwa $y = 0$ bilamana $x = -2, 1, 3$. Bilangan-bilangan -2, 1, dan 3 disebut **perpotongan** $-x$ Serupa, $x = 0$ bilamana $y = 6$, sehingga 6 disebut **perpotongan** $-y$.

CONTOH 3. Sketsakan grafik dari $y^2 - x + y - 6 = 0$, dengan memperlihatkan semua perpotongan secara jelas.

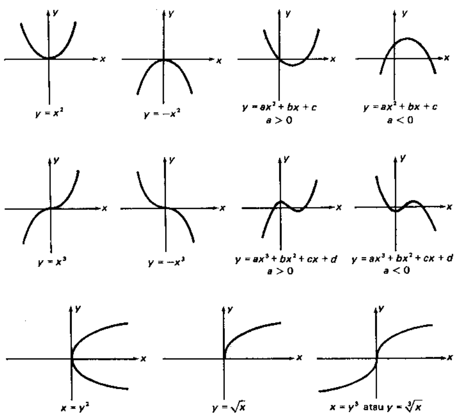
Penyelesaian. Dengan meletakkan $y = 0$ dalam persamaan yang diberikan, diperoleh $x = -6$, sehingga perpotongan-x adalah -6. Dengan meletakkan $x = 0$ dalam persamaan, diperoleh $y^2 + y - 6 = 0$, atau $(y + 3)(y - 2) = 0$; perpotongan-y adalah -3 dan 2. Pemeriksaan kesimetrian menunjukkan bahwa grafik tidak mempunyai salah satu dari tiga tipe simetri yang dibahas sebelumnya. Grafik diperagakan dalam Gambar 5. ■



GAMBAR 5

PERSAMAAN UMUM KUADRAT DAN KUBIK Oleh karena persamaan-persamaan kuadrat dan kubik akan sering digunakan sebagai contoh-contoh dalam pekerjaan selanjutnya, pada Gambar 6 berikut kami tampilkan beberapa contoh grafiknya.

GRAFIK-GRAFIK DASAR KUADRAT DAN KUBIK



GAMBAR 6

Grafik-grafik persamaan kuadrat bentuknya seperti mangkok dan dinamakan **parabol**. Bila persamaannya berbentuk $y = ax^2 + bx + c$ atau $x = ay^2 + by + c$ dengan $a \neq 0$, grafiknya akan selalu berupa parabol. Pada persamaan pertama, grafik membuka ke atas atau ke bawah sesuai dengan $a > 0$ atau $a < 0$. Pada persamaan kedua, grafik membuka ke kanan atau ke kiri sesuai dengan $a > 0$ atau $a < 0$. Perlu dicatat bahwa persamaan dalam Contoh 3 dapat diambil dalam bentuk $x = y^2 + y - 6$.

PERPOTONGAN ANTAR GRAFIK Adakalanya kita perlu mengetahui titik-titik potong antara dua grafik. Titik-titik ini diperoleh dengan memecahkan kedua persamaan grafik tersebut secara bersamaan.

CONTOH 4. Cari titik-titik perpotongan garis $y = -2x + 2$ dan parabol $y = 2x^2 - 4x - 2$ dan sketsakan kedua grafik tersebut pada bidang koordinat yang sama.

Penyelesaian. Kita harus menyelesaikan dua persamaan itu secara serentak. Ini mudah dilakukan dengan penggantian ungkapan untuk y dari persamaan pertama ke dalam persamaan kedua dan kemudian menyelesaikan persamaan yang dihasilkan untuk x.

$$-2x + 2 = 2x^2 - 4x - 2$$

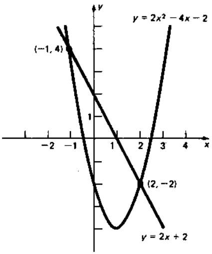
$$0 = 2x^2 - 2x - 4$$

$$0 = 2(x - 2)(x + 1)$$

$$x = -1, \qquad x = 2$$

Melalui substitusi, kita temukan nilai-nilai y yang berpadanan adalah 4 dan -2; karena itu titik-titik perpotongan adalah $(-1,4)$ dan $(2,-2)$.

Dua grafik tersebut diperlihatkan dalam Gambar 7.



GAMBAR 7

■

SOAL-SOAL 1.7

Dalam Soal-soal 1-18, gambarlah sketsa grafik dari persamaan yang diberikan. Mulai dengan memeriksa simetri dan yakinkan untuk mencari semua perpotongan-x dan y.

1. $y = -x^2 + 4$
2. $x = -y^2 + 4$
3. $3x^2 + 4y = 0$
4. $y = 2x^2 - x$
5. $x^2 + y^2 = 36$
6. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$
7. $4x^2 + 9y^2 = 36$
8. $16x^2 + y^2 = 16$
9. $y = x^3 - 3x$
10. $y = x^3 + 1$
11. $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
12. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
13. $x^3 - y^2 = 0$
14. $x^4 + y^4 = 16$
15. $y = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
16. $y = x(x - 3)(x - 5)$
17. $y = x^2(x - 2)$
18. $|x| + |y| = 4$

Dalam Soal-soal 19-26, gambarlah sketsa grafik dari kedua persamaan pada bidang koordinat yang sama. Yakinkan untuk mencari titik potong antara dua grafik tersebut (lihat Contoh 4). Anda akan memerlukan rumus kuadrat dalam Soal 23-26.

19. $y = -x + 1$
$y = x^2 + 2x + 1$

20. $y = -x + 4$
$y = -x^2 + 2x + 4$

21. $y = -2x + 1$
$y = -x^2 - x + 3$

22. $y = -3x + 15$
$y = 3x^2 - 3x + 12$

$\boxed{C}$ **23.** $y = 1{,}5x + 3{,}2$
$y = x^2 - 2{,}9x$

$\boxed{C}$ **24.** $y = 2{,}1x - 6{,}4$
$y = -1{,}2x^2 + 4{,}3$

$\boxed{C}$ **25.** $y = 4x + 3$
$x^2 + y^2 = 4$

$\boxed{C}$ **26.** $y - 3x = 1$
$x^2 + 2x + y^2 = 15$

27. Carilah jarak antara dua titik pada grafik $y = 3x^4 - 2x + 1$ dengan koordinat-koordinat-x adalah -1 dan 1.

$\boxed{C}$ **28.** Carilah jarak antara titik-titik pada kurva $y = 3x^2 - 2x + 1$ yang berpadanan terhadap $x = 1$ dan $x = \pi$, teliti sampai empat posisi desimal.

29. Tentukan kesimetrian dan sketsakan grafik $y = 2^x + 2^{-x}$.

30. Tentukan kesimetrian dan sketsakan grafik $y = 2^x - 2^{-x}$.

$\boxed{C}$ **31.** Sketsakan grafik $y = (1 + x^{3/2})/x$ untuk $0 < x \leq 16$ dengan membuat sebuah tabel nilai-nilai yang ekstensif. *Petunjuk:* Hati-hati dekat $x = 0$.

32. Tuliskan kembali persamaan dari Soal 31 sebagai $y = 1/x + \sqrt{x}$. Sekarang sketsakan grafiknya dengan secara terpisah menggambarkan grafik $y = 1/x$ dan $y = \sqrt{x}$ pada bidang koordinat yang sama dan kemudian menambahkan ordinat-ordinat (koordinat-y).

33. Informasi apakah yang dapat diambil mengenai grafik $y = ax^2 + bx + c$ dari diskriminan $d = b^2 - 4ac$? *Petunjuk:* Gunakan rumus kuadrat dan ambil tiga keadaan $d > 0$, $d = 0$ dan $d < 0$.

34. Gunakan proses penggambaran persamaan kuadrat untuk menunjukkan bahwa titik puncak (titik maksimum atau titik minimum) dari suatu parabola $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai absis $-b/2a$. Tentukan pula koordinat y-nya.

1.8 Soal-soal Ulangan Bab

KUIS BENAR-SALAH

Jawablah dengan benar atau salah masing-masing pernyataan berikut. Bersiaplah untuk mempertahankan jawaban anda.

1. Sebarang bilangan yang dapat dituliskan sebagai suatu pecahan p/q adalah rasional.
2. Selisih dua bilangan rasional adalah rasional.
3. Selisih dua bilangan takrasional adalah takrasional.
4. Di antara dua bilangan takrasional yang berlainan selalu terdapat suatu bilangan takrasional lain.
5. 0,999 . . . (angka 9 berulang) adalah kurang dari 1.
6. Operasi pemangkatan (eksponen) adalah komutasi; yaitu $(a^m)^n = (a^n)^m$.
7. Operasi * yang didefinisikan oleh $m * n = m^n$ adalah asosiasi.

8. Ketaksamaan-ketaksamaan $x \le y$, $y \le z$, dan $z \le x$ bersama-sama menunjukkan bahwa $x = y = z$.
9. Jika $|x| < \varepsilon$ untuk setiap bilangan positif ε, maka $x = 0$.
10. Jika x dan y adalah bilangan-bilangan riil, maka $(x - y)(y - x) \le 0$.
11. Jika $a < b < 0$, maka $1/a > 1/b$.
12. Adalah mungkin bagi dua selang tertutup untuk mempunyai tepat satu titik persekutuan.
13. Jika dua selang terbuka mempunyai satu titik persekutuan, maka keduanya mempunyai takterhingga banyaknya titik persekutuan.
14. Jika $x < 0$, maka $\sqrt{x^2} = -x$.
15. Jika $|x| < |y|$, maka $x < y$.
16. Jika $|x| < |y|$, maka $x^4 < y^4$.
17. Jika x dan y keduanya negatif, maka $|x + y| = |x| + |y|$.
18. Adalah mungkin untuk mempunyai ketaksamaan yang himpunan penyelesaiannya terdiri dari tepat satu bilangan.
19. Persamaan $x^2 + y^2 + ax + y = 0$ menggambarkan suatu lingkaran untuk setiap bilangan riil a.
20. Jika (a, b) terletak pada garis dengan tanjakan $\frac{3}{4}$, maka $(a + 4, b + 3)$ juga terletak pada garis tersebut.
21. Jika $ab > 0$, maka (a,b) terletak atau di kuadran pertama atau ketiga.
22. Jika $ab = 0$, maka (a, b) terletak atau pada sumbu x atau pada sumbu y.
23. Jika $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |x_2 - x_1|$, maka (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) terletak pada garis mendatar yang sama.
24. Jarak antara $(a + b, a)$ dan $(a - b, a)$ adalah $|2b|$.
25. Persamaan sebarang garis dapat dituliskan dalam bentuk titik-kemiringan.
26. Jika ada garis taktegak sejajar, keduanya mempunyai kemiringan sama.
27. Adalah mungkin bagi dua garis untuk mempunyai kemiringan positif dan saling tegaklurus.
28. Jika perpotongan–x dan perpotongan–y suatu garis adalah rasional dan taknol, maka kemiringan garis tersebut adalah rasional.
29. Garis-garis $ax + y = c$ dan $ax - y = c$ adalah tegaklurus.
30. $(3x - 2y + 4) + m(2x + 6y - 2) = 0$ merupakan persamaan suatu garis lurus untuk tiap bilangan riil m.

SOAL-SOAL ANEKA RAGAM

1. Hitung masing-masing nilai untuk $n = 1, 2$, dan -2.

(a) $\left(n + \dfrac{1}{n}\right)^n$ (b) $(n^2 - n + 1)^2$

(c) $4^{3/n}$

2. Sederhanakan,

(a) $\left(1 + \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)\left(1 - \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right)^{-1}$

(b) $\dfrac{\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x}{x^2 - x - 2}}{\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-2}}$

3. Perlihatkan bahwa rata-rata dua bilangan rasional adalah suatu bilangan rasional.

4. Tuliskan desimal berulang 4.1282828 . . . sebagai hasil bagi dua bilangan bulat.

5. Cari bilangan takrasional antara $\frac{1}{2}$ dan $\frac{13}{25}$.

$\boxed{C}$ 6. Hitung $(\sqrt[3]{8{,}15 \times 10^4} - 1{,}32)^2/3{,}24$.

Dalam Soal-soal 7-14, cari himpunan penyelesaian, gambarkan grafik himpunan ini pada garis riil, dan ungkapkan himpunan ini dalam cara penulisan selang.

7. $6x + 3 > 2x - 5$

8. $3 - 2x \leq 4x + 1 \leq 2x + 7$

9. $2x^2 + 5x - 3 < 0$

10. $\dfrac{2x - 1}{x - 2} > 0$

11. $(x + 4)(2x - 1)^2(x - 3) \leq 0$

12. $|3x - 4| < 6$

13. $\dfrac{3}{1 - x} \leq 2$

14. $|8 - 3x| \geq |2x|$

15. Andaikan $|x| \leq 2$. Gunakan sifat-sifat nilai mutlak untuk memperlihatkan.

$$\left|\frac{2x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2}\right| \leq 8$$

16. Gambar sketsa segitiga dengan titik-titik sudut $A(-2,6)$, $B(1,2)$, dan $C(5,5)$, dan perlihatkan bahwa ini merupakan sebuah segitiga siku-siku.

17. Cari jarak dari $(3,-6)$ ke titik ujung ruas garis dari $A(1,2)$ ke $B(7,8)$.

18. Cari persamaan lingkaran dengan garis tengah AB jika $A = (2,0)$ dan $B=(10, 4)$

19. Carilah pusat dan jari-jari lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.

20. Carilah jarak antara pusat lingkaran-lingkaran dengan persamaan. $x^2 - 2x + y^2 + 2y = 2$ dan $x^2 + 6x + y^2 - 4y = -7$

21. Tuliskan persamaan garis yang melalui $(-2,1)$ yang:
(a) melewati $(7,3)$;
(b) sejajar $3x - 2y = 5$;
(c) tegaklurus $3x + 4y = 9$;
(d) tegaklurus $y = 4$;
(e) mempunyai perpotongan-y 3.

22. Perlihatkan bahwa $(2,-1)$, $(5,3)$, dan $(11,11)$ berada pada garis sama.

Dalam Soal-soal 23-26, sketsakan grafik tiap persamaan.

23. $3y - 4x = 6$

24. $x^2 - 2x + y^2 = 3$

25. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$

26. $x = y^2 - 3$

27. Cari titik-titik perpotongan grafik grafik dari $y = x^2 - 2x + 4$ dan $y - x = 4$.

28. Di antara semua garis yang tegak lurus pada $4x - y = 2$, cari satu persamaan yang – bersama-sama dengan sumbu x dan sumbu y positif – membentuk sebuah segitiga yang luasnya 8.