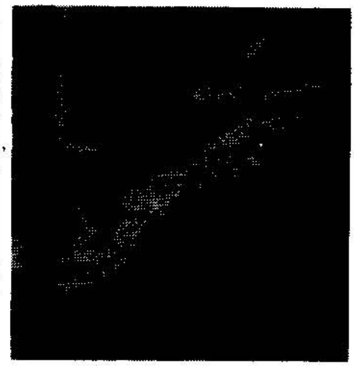
6 Penggunaan Integral

[Karya-karya Archimedes] tanpa kecuali, merupakan monumen dari eksposisi matematis; pembukaan rahasia sedikit demi sedikit dari rencana penyerangan, pengadaan yang mengagumkan dari usulan-usulan, penghilangan yang tegas dari segala sesuatu yang tidak segera berkaitan dengan tujuan, akhir dari keseluruhannya, sangat menakjubkan dalam kesempurnaannya bagai menciptakan suatu perasaan sama untuk terpesona dalam pikiran pembaca.

Sir Thomas Heath



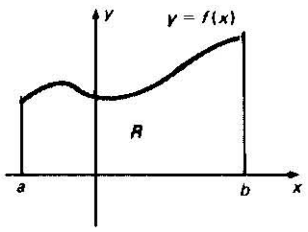
Archimedes
287–212 B.C.

Archimedes dari Syracuse, tanpa diragukan, merupakan matematikawan terbesar dari zaman purbakala. Keturunan Yunani, ia menerima pendidikan di Alexandria, pusat pengajaran dan kebudayaan Yunani. Pada masanya sendiri ia terkenal sebagai pencipta dan seorang ilmuwan praktis. Ia menciptakan sekrup Archimedes untuk memompa air, ia menyatakan sifat-sifat katrol dan pengungkit ("berikan saya tempat untuk berdiri, dan akan saya gerakkan bumi"), ia membangun sebuah model mekanis yang meniru gerakan bulan dan planet-planet, dan – untuk memuaskan raja Syracuse – ia menemukan cara untuk memutuskan apakah mahkota raja dibuat dari emas asli tanpa meleburnya (prinsip daya apung Archimedes).

Penemuan-penemuan dan perkakas-perkakas praktis untuk Archimedes hanyalah hiburan belaka; tulisan-tulisannya yang terbaik dan pikirannya yang paling tajam dicurahkan ke bagian dari matematika yang sekarang dikenal sebagai kalkulus integral. Dengan memakai metode (metode keletihan) di mana ia menjumlahkan sejumlah besar-besaran yang sangat kecil, ia mengemukakan beberapa dari hasil-hasil itu dalam bab ini. Sumbangan-sumbangannya antara lain adalah rumus luas lingkaran, luas dari potongan parabol, luas elips, volume dan luas permukaan bola, dan volume kerucut dan benda-benda putar lain. Ia dikatakan telah meminta kepada teman-temannya agar di atas batu nisannya di letakkan sebuah bola yang berisi tabung berukir, ditulisi dengan hasil bagi volume bola dan tabung tersebut.

6.1 Luas Daerah Bidang Rata

Pembahasan singkat tentang luas di dalam Pasal 5.4 diperlukan untuk memberikan dasar tentang definisi integral tentu. Setelah konsep ini benar-benar dipahami, kita berbalik arah, dan menggunakan integral tentu untuk menghitung luas daerah-daerah yang bentuknya rumit. Seperti biasa kita mulai dengan kasus yang sederhana.



GAMBAR 1

DAERAH DI ATAS SUMBU X Andaikan $y = f(x)$ menentukan persamaan sebuah kurva pada bidang xy dan andaikan f kontinu dan tak-negatif pada selang (interval) $a \leqslant x \leqslant b$. (Gambar 1). Tinjaulah daerah R yang dibatasi oleh grafik-grafik dari $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$. Kita mengacu R sebagai daerah di bawah $y = f(x)$ antara $x = a$ dan $x = b$. Luasnya, $A(R)$, ditentukan oleh

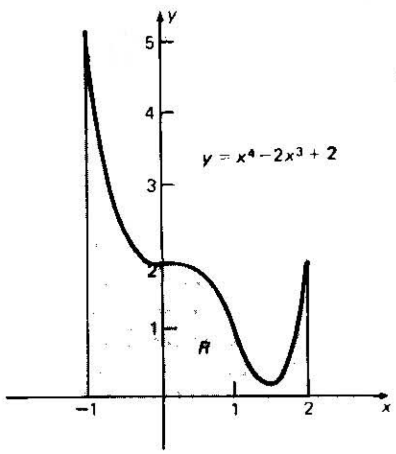
$$A(R) = \int_a^b f(x)\,dx$$

CONTOH 1 Tentukan luas daerah R di bawah kurva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

Penyelesaian Daerah R diperlihatkan pada Gambar 2.

$$A(R) = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)\,dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

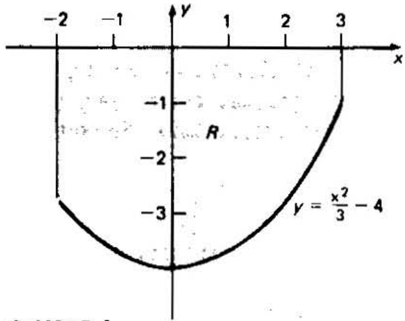
$$= \left(\frac{32}{5} - \frac{16}{2} + 4\right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 2\right) = \frac{51}{10} \quad ■$$



GAMBAR 2

DAERAH DI BAWAH SUMBU X Luas dinyatakan oleh bilangan yang tak negatif. Apabila grafik $y = f(x)$ terletak di bawah sumbu-x, maka $\int_a^b f(x)\,dx$ adalah bilangan yang negatif, sehingga tak dapat melukiskan suatu luas. Akan tetapi bilangan itu adalah negatif untuk luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ dan $y = 0$.

CONTOH 2 Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^2/3 - 4$, sumbu x, $x = -2$ dan $x = 3$.



GAMBAR 3

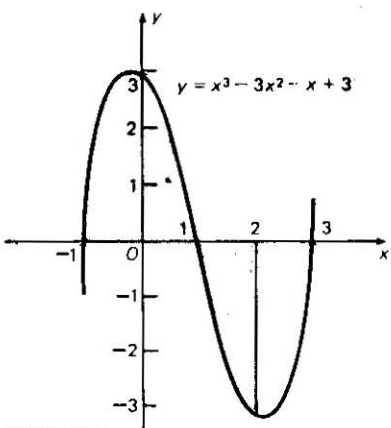
Penyelesaian
Daerah R diperlihatkan pada Gambar 3.

$$A(R) = -\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3} - 4\right)dx = \int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3} + 4\right)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{9} + 4x\right]_{-2}^{3} = \left(-\frac{27}{9} + 12\right) - \left(\frac{8}{9} - 8\right) = \frac{145}{9}$$

■

CONTOH 3 Tentukan luas daerah R yang dibatasi oleh $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$, ruas sumbu x antara $x = -1$ dan $x = 2$, dan oleh garis $x = 2$.



GAMBAR 4

Penyelesaian
Daerah R adalah daerah yang diarsir pada Gambar 4. Perhatikan bahwa ada sebagian di atas sumbu x dan ada yang di bawah sumbu x. Luas masing-masing bagian ini harus dihitung secara terpisah. Mudah dihitung bahwa kurva di atas memotong sumbu x di -1, 1 dan 3 sehingga

$$A(R) = \int_{-1}^{1}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx - \int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - x + 3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{1}^{2}$$

$$= 4 - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{23}{4}$$

Perhatikan bahwa kita dapat menyatakan luas daerah itu sebagai satu integral dengan menggunakan lambang nilai mutlak, yaitu

$$A(R) = \int_{-1}^{2}|x^3 - 3x^2 - x + 3|\,dx$$

Tetapi penulisan ini bukan penyederhanaan dalam perhitungan, sebab untuk menghitung integral terakhir ini kita harus menulis integral ini sebagai dua integral seperti telah kita lakukan. ■

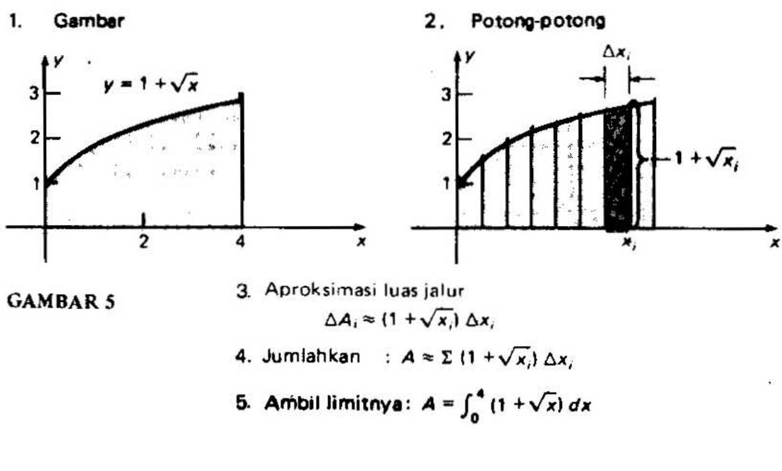
CARA BERFIKIR YANG DAPAT MEMBANTU Sampai kini baik untuk daerah-daerah sederhana sejenis yang ditinjau di atas, mudah sekali menuliskan integral yang benar. Bilamana kita meninjau daerah yang lebih rumit (misalnya, daerah di antara dua kurva), tugas pemilihan integral yang benar lebih sukar. Tetapi, terdapat suatu cara berfikir yang dapat sangat membantu. Pemikiran itu kembali ke definisi luas dan integral tentu. Berikut cara berfikir tersebut dalam lima langkah.

Langkah 1 Gambarlah daerah yang bersangkutan.
Langkah 2 Potonglah menjadi jalur-jalur dan berilah nomor pada suatu jalur tertentu.
Langkah 3 Hampiri luas suatu jalur tertentu tersebut dengan luas persegi panjang yang sesuai.
Langkah 4 Jumlahkan luas aproksimasi tersebut.
Langkah 5 Ambillah kemudian limit dari jumlah itu dengan jalan menunjukkan jalur ke nol lebar sehingga diperoleh suatu integral tertentu.

Untuk menjelaskannya, perhatikanlah contoh sederhana lain berikut ini.

CONTOH 4 Susunlah integral untuk luas daerah dibawah kurva $y = 1 + \sqrt{x}$ yang terletak antara garis dengan persamaan $x = 0$ dan $x = 4$ (Gambar 5).

Penyelesaian

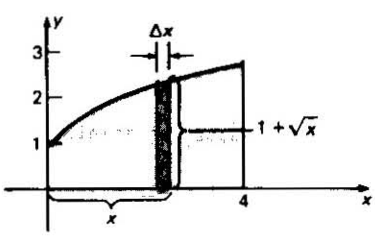


GAMBAR 5

3. Aproksimasi luas jalur
$\Delta A_i \approx (1 + \sqrt{x_i})\,\Delta x_i$

4. Jumlahkan : $A \approx \Sigma\,(1 + \sqrt{x_i})\,\Delta x_i$

5. Ambil limitnya: $A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})\,dx$



GAMBAR 6

$\Delta A \approx (1 + \sqrt{x})\,\Delta x$

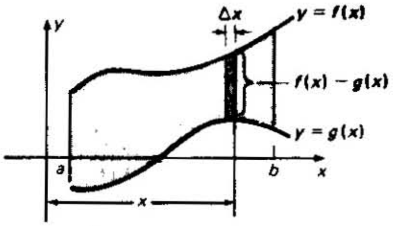
$A = \int_0^4 (1 + \sqrt{x})\,dx$

Setelah kita pahami benar prosedur lima langkah tersebut, kita dapat menyingkatnya menjadi tiga langkah, yaitu: *potong-potong, (slice), aproksimasikan, integralkan.*

Ingatlah bahwa mengintegralkan berarti, menjumlahkan dan mengambil limit apabila panjang jalur menuju nol. Dalam proses ini $\sum \ldots \Delta x$ berubah menjadi $\int \ldots dx$. Gambar 6 menunjukkan proses yang telah dipersingkat itu untuk soal yang sama.

■

DAERAH ANTARA DUA KURVA. Tinjaulah kurva-kurva $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $g(x) \leq f(x)$ pada selang $a \leq x \leq b$. Kurva-kurva ini dan selang itu membatasi daerah yang tergambar pada Gambar 7. Kita gunakan cara: *potong, aproksimasi, integralkan*, untuk menentukan luas daerah tersebut.



$\Delta A \approx [f(x) - g(x)]\,\Delta x$

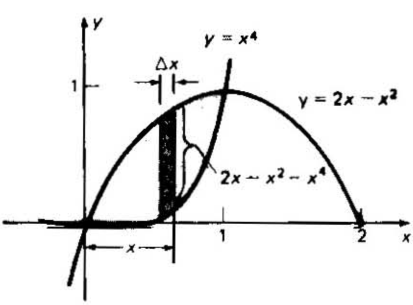
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$

GAMBAR 7

Anda perlu memperhatikan bahwa $f(x) - g(x)$ adalah tinggi jalur potong yang benar; walaupun kurva g berada di sebelah bawah sumbu x. Sebab dalam hal ini $g(x)$ negatif; jadi mengurangi dengan $g(x)$ berarti menjumlahkan dengan bilangan yang positif. Anda dapat melihat sendiri bahwa $f(x) - g(x)$ adalah tinggi jalur yang benar, sekalipun $f(x)$ dan $g(x)$ adalah negatif.

CONTOH 5 Tentukan luas daerah antara kurva $y = x^4$ dan $y = 2x - x^2$.

Penyelesaian Kita mulai menentukan titik-titik potong kurva-kurva tersebut dan kemudian menggambarkannya. Jadi kita mencari akar-akar persamaan $2x - x^2 = x^4$, suatu persamaan berderajat empat, yang biasanya tidak mudah terpecahkan. Akan tetapi, tampak bahwa $x = 0$ dan $x = 1$, adalah dua di antara akar-akarnya. Gambar daerah, potongan jalur dan aproksimasi serta integral yang bersangkutan dapat dilihat pada Gambar 8.



$\Delta A \approx (2x - x^2 - x^4)\,\Delta x$

$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx$

GAMBAR 8

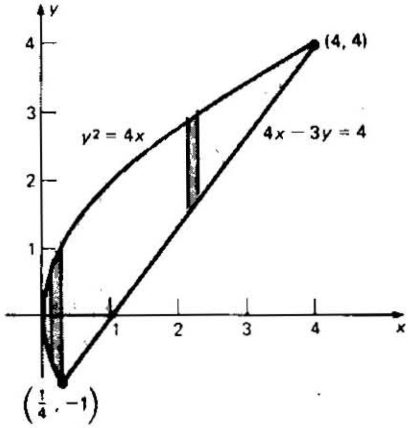
Masiha da satu tugas lagi, yaitu menghitung integral.

$$\int_0^1 (2x - x^2 - x^4)\,dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

■

CONTOH 6 Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh *parabol* $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

Penyelesaian Kita tentukan titik potong parabol dan garis koordinat y dari titik-titik ini dapat diperoleh dan penulisan persamaan yang kedua sebagai $4x = 3y + 4$, dan kemudian dua ungkapan untuk $4x$ disamakan.



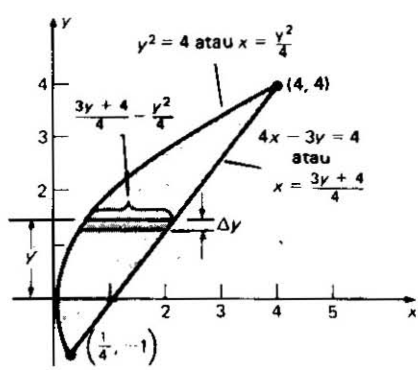
$$\begin{aligned} y^2 &= 3y + 4 \\ y^2 - 3y - 4 &= 0 \\ (y - 4)(y + 1) &= 0 \\ y &= 4, -1 \end{aligned}$$

Dengan demikian titik-titik potong tersebut adalah (4, 4) dan $(\frac{1}{4}, -1)$. Daerah yang harus dicari luasnya dapat dilihat pada Gambar 9.

GAMBAR 9

Daerah ini kita potong-potong menjadi jalur-jalur tegak (vertikal), seperti terlihat pada gambar. Ada kesulitan sedikit, karena kurva batas bawah terdiri atas dua kurva. Di sebelah kiri sekali jalur-jalur merentang dari bagian bawah parabol hingga bagian atasnya, sedangkan untuk daerah sisanya jalur-jalur ini merentang dari garis hingga parabol. Jadi, apabila kita menggunakan jalur-jalur tegak, kita bagi daerah yang bersangkutan menjadi dua bagian, kemudian membentuk integral untuk masing-masing bagian; kemudian menghitungnya.

Suatu penyelesaian yang jauh lebih sederhana ialah memotong daerah menjadi jalur-jalur yang datar, seperti dapat kita lihat pada Gambar 10. Dalam hal ini kita menggunakan y sebagai variabel dalam integral, dan bukan x. Perhatikan bahwa jalur-jalur yang datar itu selalu bermula pada parabol (di sebelah kiri) dan berakhir pada garis (di sebelah kanan).



GAMBAR 10

$$\Delta A \approx \left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]\Delta y \qquad A = \int_{-1}^{4}\left[\frac{3y+4}{4} - \frac{y^2}{4}\right]dy$$

$$
\begin{aligned}
A = \int_{-1}^{4} \left[\frac{3y + 4 - y^2}{4}\right] dy &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{4} (3y + 4 - y^2)\, dy \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{3y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{4} \\
&= \frac{1}{4}\left[\left(24 + 16 - \frac{64}{3}\right) - \left(\frac{3}{2} - 4 + \frac{1}{3}\right)\right] \\
&= \frac{125}{24} \approx 5{,}21
\end{aligned}
$$

Ada dua hal yang harus diperhatikan, yaitu: (1) Integran yang menyangkut penjaluran datar mengandung variabel y, bukan x; dan (2) untuk memperoleh integran, kita nyatakan x masing-masing dengan y dari dua persamaan yang diketahui. Kemudian kita kurangkan nilai x yang lebih kecil (kurva kiri) dari nilai x yang lebih besar (kurva kanan). ■

JARAK DAN PERPINDAHAN Pandang suatu benda yang bergerak sepanjang garis lurus dengan kecepatan $v(t)$ pada saat t. Bila $v(t) \geq 0$, maka $\int_a^b v(t)dt$ menyatakan jarak yang ditempuh dalam selang waktu $a \leq t \leq b$ (lihat Pasal 5.4). Namun, $v(t)$ dapat pula bernilai negatif (yang berarti bahwa benda itu bergerak dalam arah sebaliknya), maka

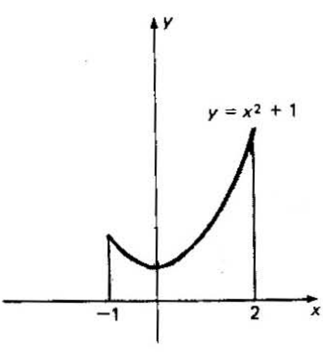
$$\int_a^b v(t)\, dt = s(b) - s(a)$$

menyatakan **perpindahan** benda itu, yang berarti, jarak lurus dari tempat berangkat $s(a)$ ke tempat akhir $s(b)$. Untuk mendapatkan **jarak keseluruhan** yang ditempuh benda selama $a \leq t \leq b$, kita harus menghitung $\int_a^b |v(t)|\, dt$, luas daerah antara kurva kecepatan dan sumbu-t. Soal 31-33 menggambarkan gagasan ini.

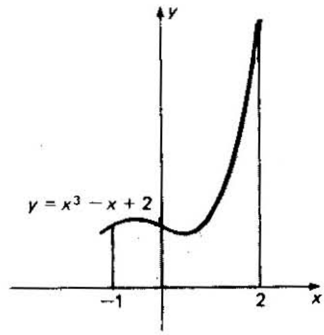
SOAL-SOAL 6.1

Dalam Soal-soal 1-10, gunakan prosedur tiga langkah (potong, aproksimasi, integralkan) untuk menyusun integral daerah yang harus dicari luasnya.

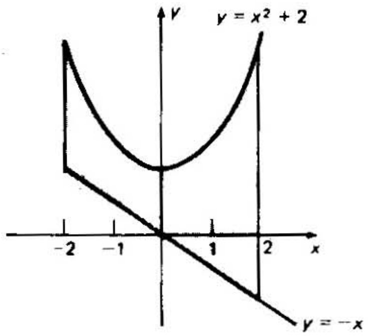
1.



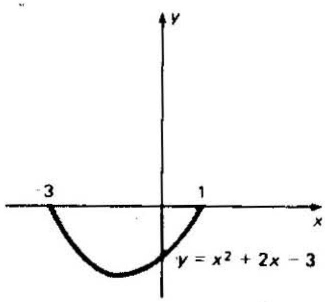
2.



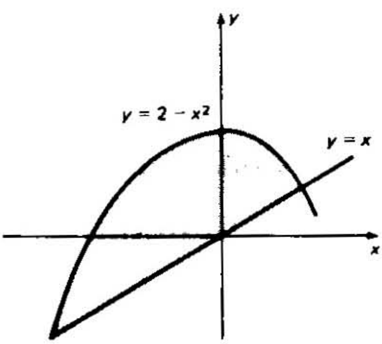
3.



4.

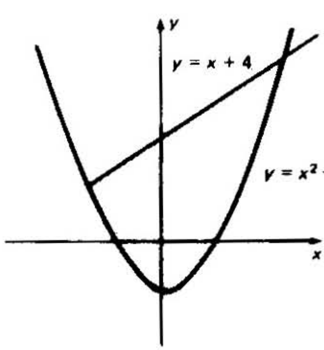


5.

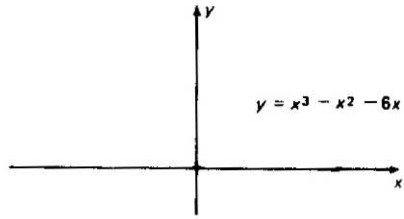


Petunjuk: Untuk menentukan titik-titik potong, selesaikanlah persamaan $x = 2 - x^2$.

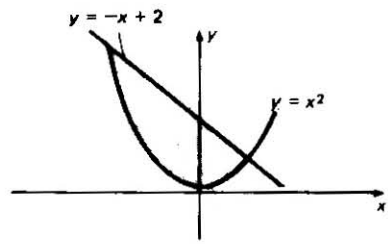
6.



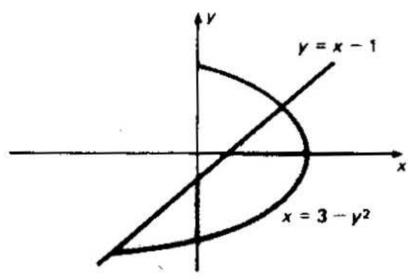
7.



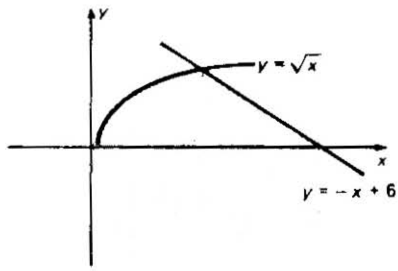
8.



9.



10.



Dalam Soal-soal 11-28, gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diketahui. Tunjuklah sebuah persegi-panjang dalam suatu jalur potongan, aproksimasilah luasnya, susunlah integral yang sesuai dan kemudian hitunglah luas daerah yang bersangkutan.

11. $y = 4 - \frac{1}{3}x^2, y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 3$.

12. $y = 4x - x^2, y = 0$, antara $x = 1$ dan $x = 3$.

13. $y = x^2 - 2x - 3, y = 0$, antara $x = 0$ dan $x = 2$.

14. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10), y = 0$, antara $x = -2$ dan $x = 3$

15. $y = x^3, y = 0, x = -1, x = 2$

16. $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = -1, x = 8$

17. $y = \sqrt{x - 4}, y = 0, x = 8$

18. $y = x^2 - 4x + 3, x - y - 1 = 0$

19. $y = x^2, y = x + 2$

20. $y = 2\sqrt{x}, y = 2x - 4, x = 0$

21. $y = x^2 - 4x, y = -x^2$

22. $y = x^2 - 2, y = 2x^2 + x - 4$

23. $x = 6y - y^2, x = 0$

24. $x = -y^2 + y + 2, x = 0$

25. $x = 4 - y^2, x + y - 2 = 0$

26. $x = y^2 - 3y, x - y + 3 = 0$

27. $y^2 - 2x = 0, y^2 + 4x - 12 = 0$

28. $x = y^4, x = 2 - y^4$

29. Gambarlah daerah R yang dibatasi oleh $y = x + 6, y = x^3$, dan $2y + x = 0$. Hitunglah luasnya. *Petunjuk:* Bagilah R menjadi dua daerah.

30. Dengan menggunakan integral, tentukan luas segi-tiga yang titik-titik sudutnya adalah $(-1, 4)$, $(2, -2)$ dan $(5, 1)$.

31. Sebuah benda bergerak di sepanjang suatu garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah $v(t) = 3t^2 - 24t + 36$ kaki per detik (lihat Contoh 3 pada Pasal 3.7). Carilah perpindahan dan jarak keseluruhan yang ditempuh benda itu untuk $-1 \leq t \leq 9$.

32. Ikuti petunjuk dalam Soal 31, apabila $v(t) = \frac{1}{2} + \sin 2t$ dan selang waktunya $0 \leq t \leq 3\pi/2$.

33. Berangkat pada $s = 0$ dan $t = 0$, suatu benda bergerak sepanjang garis lurus sedemikian rupa sehingga kecepatannya pada saat t adalah $v(t) = 2t - 4$ cm per detik. Berapa lama benda itu akan mencapai $s = 12$? Untuk menempuh jarak keseluruhan 12 cm?

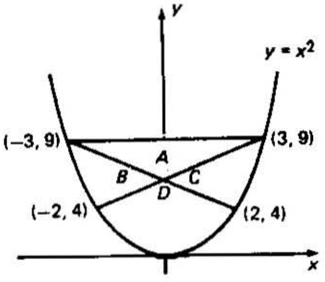
34. Pandang kurva $y = 1/x^2$ untuk $1 \leq x \leq 6$.

(a) Hitunglah luas daerah di bawah kurva ini.

(b) Tentukan c sedemikian rupa sehingga garis $x = c$ membagi dua luas pada (a) sama besar.

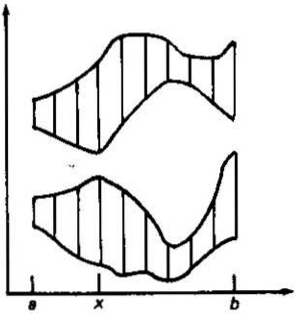
(c) Tentukan d sedemikian rupa sehingga garis $y = d$ membagi dua luas pada (a) sama besar.

35. Hitunglah luas A, B, C, dan D dalam Gambar 11. Periksalah dengan menghitung $A + B + C + D$ dalam satu bentuk integral.



GAMBAR 11

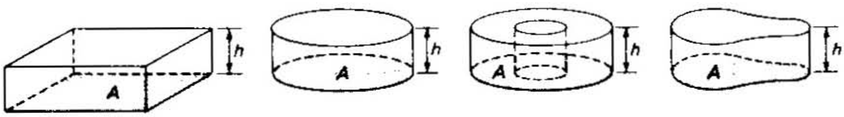
36. Buktikan prinsip Cavalieri. Bila dua daerah memiliki tebal yang sama pada setiap x di $[a, b]$, maka keduanya akan mempunyai luas yang sama (lihat Gambar 12).



GAMBAR 12

6.2 Volume Benda dalam Bidang: Lempengan, Cakram, Cincin

Integral tentu dapat digunakan untuk menghitung luas. Ini tidak mengherankan oleh karena integral tersebut memang diciptakan untuk keperluan itu. Akan tetapi integral tersebut dapat digunakan untuk banyak persoalan lainnya. Hampir tiap besaran yang dapat dianggap sebagai hasil pemotongan sesuatu menjadi bagian-bagian lebih kecil, aproksimasi tiap bagian, penjumlahan dan pengambilan limit apabila tiap bagian mengecil, dapat diartikan sebagai suatu integral. Khususnya, hal ini benar untuk volume benda-benda tertentu yang akan kita bahas di bawah ini.



GAMBAR 1

Apakah yang disebut volume? Kita mulai dengan benda-benda sederhana, yaitu tabung lingkaran tegak dan sejenisnya. Empat di antaranya dapat dilihat pada Gambar 1. Dalam tiap kasus, benda itu diperoleh dengan cara menggerakkan suatu daerah pada bidang (rata) sejauh h dengan arah yang tegak lurus pada daerah tersebut. Dalam tiap kasus itu, volume benda ditentukan sebagai luas A, daerah alas, dikalikan dengan tinggi h, yakni

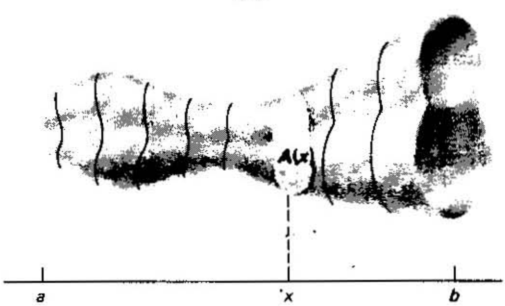
$$V = A \cdot h$$

Kemudian perhatikanlah sebuah benda yang bersifat bahwa penampang-penampang tegaklurusnya pada suatu garis tertentu memiliki luas tertentu. Misalnya garis tersebut adalah sumbu x dan andaikan bahwa luas penampang di x adalah $A(x)$ dengan $a \leqslant x \leqslant b$ (Gambar 2). Selang $[a, b]$ kita bagi dengan titik-titik bagi $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$. Melalui titik-titik itu kita lukis bidang tegaklurus pada sumbu x. Dengan demikian kita peroleh pemotongan benda menjadi **lempengan** yang tipis-tipis (Gambar 3). Volume ΔV_i suatu lempeng dapat dianggap sebagai volume tabung, yaitu

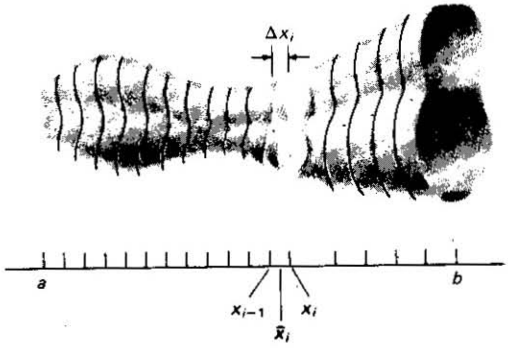
$$\Delta V_i \approx A(\bar{x}_i)\,\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$$

dan volume V benda dapat diaproksimasi dengan jumlah Riemann

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x_i$$



GAMBAR 2



GAMBAR 3

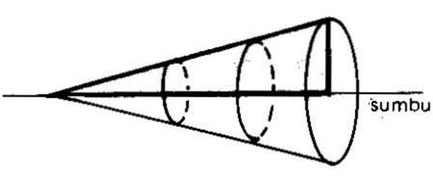
Apabila norma partisi kita tujukan ke nol, kita memperoleh suatu integral tentu; integral ini kita definisikan sebagai volume benda

$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\,dx} = \pi \int_A^{\ell} A(x)\, dx$$

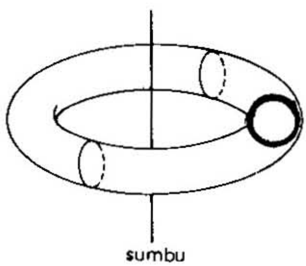
Dalam perhitungan volume-volume benda, sebaiknya anda jangan menggunakan rumus itu secara hafalan. Akan tetapi anda haruslah memahami proses yang menuju ke penemuan rumus tersebut. Seperti untuk luas, proses itu kita sebut pula, *pemotongan, aproksimasi* dan *pengintegralan*. Hal ini diperjelas dalam contoh-contoh di bawah ini.

BENDA PUTAR: METODE CAKRAM Apabila sebuah daerah rata, yang terletak seluruhnya pada satu bagian bidang yang terbagi oleh sebuah garis lurus tetap, diputar mengelilingi garis tersebut, daerah itu akan membentuk sebuah *benda putar*. Garis yang tetap tersebut dinamakan **sumbu putar.**

Sebagai contoh, apabila daerah yang dibatasi oleh setengah lingkaran dan garis tengahnya, diputar mengelilingi garis tengah itu, maka daerah tersebut membentuk sebuah bola. Apabila daerah segitiga diputar mengelilingi salah satu kakinya, daerah itu akan membentuk sebuah kerucut (Gambar 4). Apabila sebuah daerah lingkaran diputar mengelilingi sebuah garis pada bidang lingkaran itu yang tidak memotongnya (Gambar 5), maka diperoleh sebuah torus (ban). Dalam tiap hal, volume benda-benda itu dapat disajikan sebagai suatu integral tentu.

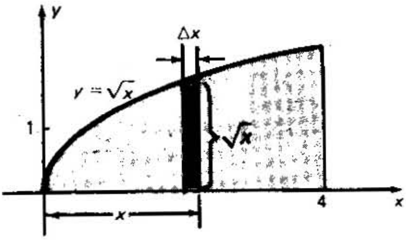


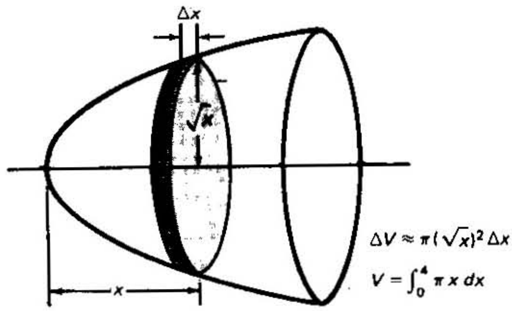
GAMBAR 4



GAMBAR 5

CONTOH 1 Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh daerah R yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, sumbu x dan garis $x = 4$ apabila R diputar mengelilingi sumbu x.



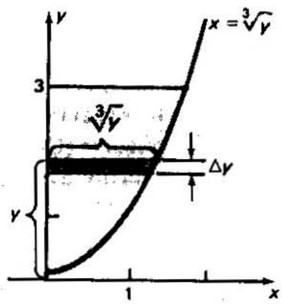


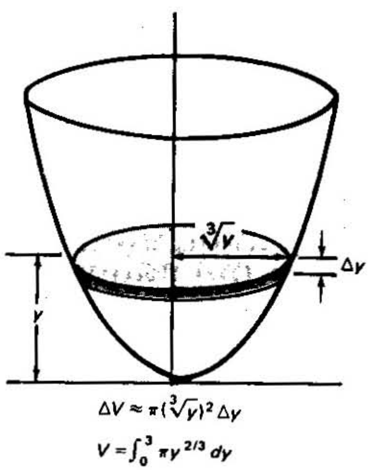
GAMBAR 6

Penyelesaian Pada bagian kiri Gambar 6 kita lihat daerah dengan sebuah jalur pemotongan. Apabila R diputar mengelilingi sumbu x, daerah ini akan membentuk sebuah benda putar dan jalur tersebut membentuk sebuah cakram yang volumenya ΔV dapat kita aproksimasi dengan volume sebuah tabung dengan tinggi Δx_i dan dengan jari-jari alas $\Delta V \approx \pi(\sqrt{x})^2 \Delta x$, volume tabung ini adalah $\pi r^2 h$. Apabila volume tabung-tabung ini kita jumlahkan dan kemudian kita integralkan, maka

$$V = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \pi \frac{16}{2} = 8\pi \approx 25{,}13 \qquad \blacksquare$$

CONTOH 2 **Tentukan volume benda putar yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^3$, sumbu y dan garis $y = 3$ diputar mengelilingi sumbu y. (Gambar 7).**

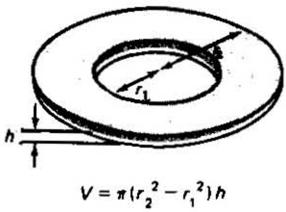




GAMBAR 7

Penyelesaian Dalam kasus ini, lebih mudah y digunakan sebagai variabel pengintegralan. Perhatikan bahwa $y = x^3$ setara dengan $x = \sqrt[3]{y}$ dan $\Delta V \approx (\sqrt[3]{y})^2\, \Delta y$ maka

$$V = \pi \int_0^3 y^{2/3}\, dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^3 = \pi \frac{9\sqrt[3]{9}}{5} \approx 11{,}76 \qquad \blacksquare$$



GAMBAR 8

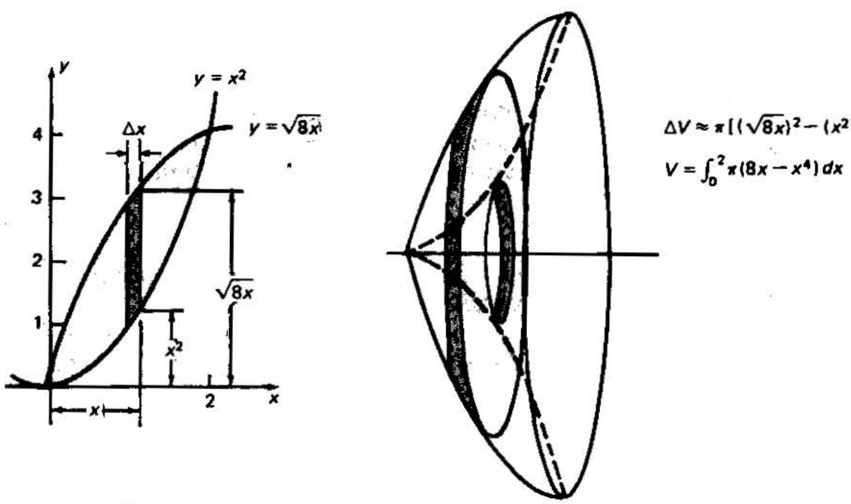
METODE CINCIN Ada kalanya apabila sebuah benda putar kita potong-potong tegak lurus pada sumbu putarnya, kita memperoleh sebuah cakram yang di tengah-tengahnya ada lubangnya. Daerah demikian kita sebut cincin. Lihat Gambar 8.

CONTOH 3 Tentukan volume benda putar apabila daerah yang dibatasi oleh parabol-parabol $y = x^2$ dan $y^2 = 8x$ diputar mengelilingi sumbu -x.

Penyelesaian Di sini kita juga menggunakan metode *potong* menjadi jalur-jalur, kemudian *diaproksimasi,* dan akhirnya *diintegralkan* (Gambar 9).

$$V = \pi \int_0^2 (8x - x^4)\, dx = \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{48\pi}{5} \approx 30{,}16$$ ■

CONTOH 4 Daerah setengah lingkaran yang dibatasi oleh kurva $x = \sqrt{4 - y^2}$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis $x = -1$. Susunlah integral yang merumuskan volume benda putar itu.



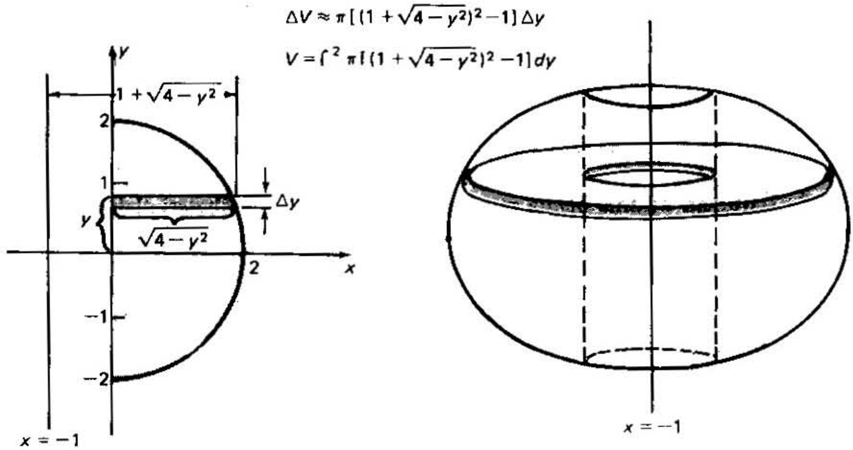
GAMBAR 9

Penyelesaian Jari-jari luar cincin adalah $\sqrt{4 - y^2} + 1$, sedangkan jari-jari dalam adalah 1. Lihat Gambar 10. Integral yang bersangkutan dapat disederhanakan. Bagian yang terletak di atas sumbu x, volumenya sama dengan bagian yang di bawah sumbu x. Jadi kita cukup mengintegralkan antara 0 dan 2 dan kemudian hasilnya dikalikan dua. Kita peroleh:

$$V = \pi \int_{-2}^{2} [(1 + \sqrt{4 - y^2})^2 - 1]\, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 [2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2]\, dy$$

Untuk menghitung integral tersebut lihatlah Soal 31. ∎

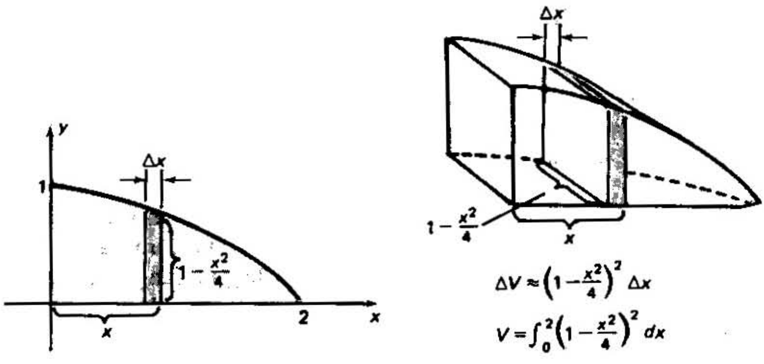


GAMBAR 10

BENDA RUANG LAIN YANG PENAMPANGNYA DIKETAHUI Benda yang kita bahas memiliki daerah-daerah lingkaran sebagai penampang-penampang tegak. Metode yang kita gunakan tetap berlaku untuk benda-benda yang penampang tegaknya berbentuk bujur sangkar atau segitiga. Sesungguhnya yang kita perlukan ialah bahwa kita dapat menghitung luas penampang-penampang tersebut.

CONTOH 5 **Andaikan alas sebuah benda adalah suatu daerah rata pada kuadran pertama yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2/4$, sumbu x dan sumbu y. Andaikan penampang-penampang yang tegaklurus pada sumbu x berbentuk bujur sangkar. Tentukan volume benda ini.**

Penyelesaian **Apabila kita potong-potong benda tegaklurus pada sumbu x kita peroleh lempeng-lempeng tipis yang berbentuk bujursangkar (Gambar 11).**

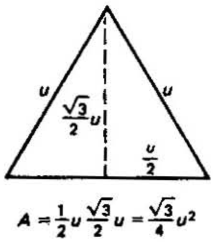


GAMBAR 11

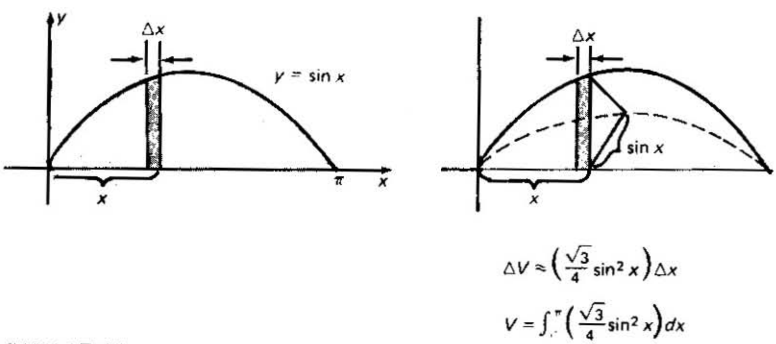
$$V = \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{80}\right]_0^2$$

$$= 2 - \frac{8}{6} + \frac{32}{80} = \frac{16}{15} \approx 1{,}07 \qquad ■$$

CONTOH 6 Alas sebuah benda diketahui merupakan daerah yang dibatasi oleh satu busur kurva $y = \sin x$ dan sumbu x. Tiap penampang yang tegaklurus pada sumbu x adalah sebuah segitiga sama sisi yang berdiri pada alasnya. Tentukan volume benda itu.



GAMBAR 12



GAMBAR 13

Penyelesaian Kita ingat bahwa luas segitiga sama sisi dengan panjang sisi u adalah $\sqrt{3}u^2/4$ (Gambar 12). Kemudian lihatlah Gambar 13. Untuk melakukan pengintegralan kita menggunakan $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\,dx$$

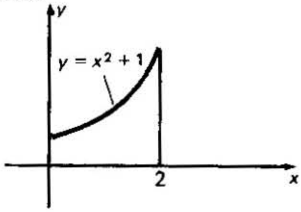
$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[\int_0^\pi 1\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x \cdot 2\,dx\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \approx 0{,}68 \qquad ■$$

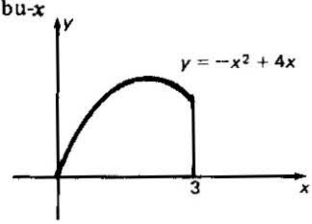
SOAL-SOAL 6.2

Dalam Soal-soal 1 hingga 4, tentukan volume benda yang dibentuk, apabila daerah yang diberikan diputar mengelilingi sumbu yang diberikan; *potong, diaproksimasi, diintegralkan.*

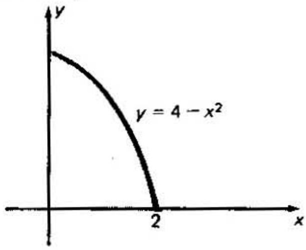
1. sumbu-x



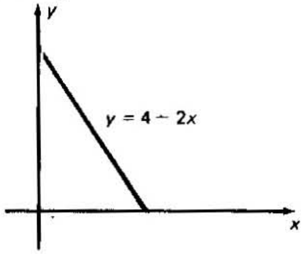
2. sumbu-x



3. (a) sumbu-x
(b) sumbu-y



4. (a) sumbu-x
(b) sumbu-y



Dalam Soal-soal 5 hingga 10, buatlah sketsa daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diketahui. Perlihatkan sebuah jalur persegi-panjang yang tegak. Kemudian tentukan volume benda yang terbentuk apabila R diputar mengelilingi sumbu x.

5. $y = \dfrac{x^2}{4}, x = 4, y = 0$

6. $y = x^3, x = 2, y = 0$

7. $y = \dfrac{1}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$

8. $y = x^{3/2}, y = 0,$ antara $x = 1$ dan $x = 3$.

9. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0,$ antara $x = -1$ dan $x = 2$.

10. $y = x^{2/3}, y = 0,$ antara $x = 1$ dan $x = 8$.

Dalam Soal-soal 11 hingga 16, gambarlah daerah R yang dibatasi oleh kurva-kurva yang persamaannya diberikan. Perlihatkanlah jalur persegi-panjang yang mendatar. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila R diputar mengelilingi sumbu y.

11. $x = y^2, x = 0, y = 2$

12. $x = \dfrac{2}{y}, y = 1, y = 6, x = 0$

13. $x = \sqrt{y}, y = 4, x = 0$

14. $x = y^{2/3}, y = 8, x = 0$

15. $x = y^{3/2}, y = 4, x = 0$

16. $x = \sqrt{9 - y^2}, x = 0$

17. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila bagian atas elips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

diputar mengelilingi sumbu x. Dengan demikian dapat dihitung volume benda yang disebut sferoid; a dan b konstanta dan $a > b$.

18. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabol $y = 4x^2$ diputar mengelilingi sumbu x. Gambarlah.

19. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh garis $x - 2y = 0$ dan parabol $y^2 - 2x = 0$ diputar mengelilingi sumbu x. Gambarlah.

20. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, sumbu x dan garis $x = r - h$, $0 < h < r$, diputar mengelilingi sumbu x. Benda yang terjadi adalah tembereng bola dengan tinggi h dari bola berjari-jari r

21. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada bidang xy yang dibatasi oleh garis $y = 4x$ dan parabol $y = 4x^2$ diputar mengelilingi sumbu y. Gambarlah.

22. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah dalam kuadran pertama yang dibatasi oleh parabol-parabol $3x^2 - 16y + 48 = 0$ dan $x^2 - 16y + 80 = 0$ dan sumbu y diputar mengelilingi garis $y = 2$. Gambarlah.

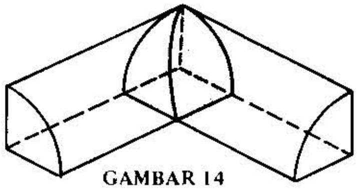
23. Alas sebuah benda adalah daerah lingkaran $x^2 + y^2 = 4$. Tentukan volume benda tersebut apabila tiap penampang oleh bidang yang tegaklurus pada sumbu x adalah bujur sangkar. *Petunjuk:* Lihat Contoh 5 dan 6.

24. Seperti Soal nomor 23 akan tetapi penampang benda dengan bidang yang tegaklurus pada sumbu x adalah segi-tiga sama kaki yang alasnya terletak pada bidang xy dengan tinggi 4. *Petunjuk:* Untuk melengkapi perhitungan, anggaplah $\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, dx$ sebagai luas (daerah) setengah lingkaran.

25. Alas sebuah benda dibatasi oleh satu busur dan kurva $y = \sqrt{\cos x}$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, dan sumbu x. Tiap penampang benda dengan benda yang tegaklurus pada sumbu x berbentuk bujur sangkar yang alasnya terletak pada bidang kurva tadi. Tentukan volume benda itu.

26. Alas sebuah benda adalah daerah yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$ dan $y = 1 - x^4$. Penampang benda dengan bidang-bidang tegaklurus pada sumbu x adalah bujur sangkar. Tentukan volume benda itu.

27. Tentukan volume satu oktan (seperdelapan) benda yang merupakan daerah sekutu dua tabung lingkaran tegak dengan jari-jari masing-masing 1, dan yang sumbu-sumbunya berpotongan tegaklurus. *Petunjuk:* Penampang yang mendatar adalah bujur sangkar (lihatlah gambar).



GAMBAR 14

28. Alas sebuah benda adalah suatu daerah R yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$ Tiap penampang dengan bidang yang tegaklurus pada sumbu x adalah setengah lingkaran dengan garis tengah yang melintasi daerah R tersebut. Tentukan volume benda itu.

29. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah pada kuadran pertama yang dibatasi oleh kurva $y^2 = x^3$, garis $x = 4$ dan sumbu x diputar mengelilingi (a) garis $x = 4$; (b) garis $y = 8$.

30. Tentukan volume benda yang terbentuk apabila daerah yang dibatasi oleh $y^2 = x^3$, garis $y = 8$ dan sumbu y diputar mengelilingi (a) garis $x = 4$; (b) garis $y = 8$.

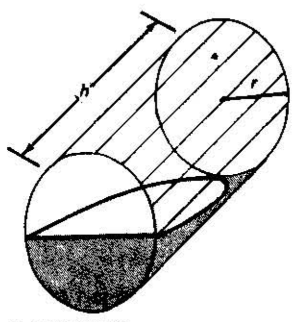
31. Lengkapkanlah perhitungan integral dalam Contoh 4, dengan mengingat bahwa

$$\int_0^2 [2\sqrt{4 - y^2} + 4 - y^2]\, dy$$

$$= 2\int_0^2 \sqrt{4 - y^2}\, dy + \int_0^2 (4 - y^2)\, dy$$

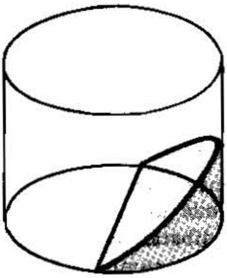
Kemudian anggaplah integral yang pertama sebagai luas daerah seperempat lingkaran.

32. Sebuah tong kayu terbuka dengan jari-jari r dan tinggi h pada mulanya penuh dengan air. Tong ini dimiringkan sampai pada tingkat air persis sama dengan garis tengah dasarnya dan muka tepat menyentuh tepi/bibir tong bagian atas. Carilah volume air yang tinggal di dalam tong tersebut.



GAMBAR 15

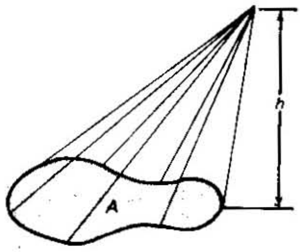
33. Sebuah pasak didapat dari pemotongan sisi kanan silinder pejal yang berjari-jari r. Permukaan bagian atas pasak tersebut berada pada suatu bidang yang melalui diameter a dari lingkar alas silinder dan membentuk sudut θ dengan alas. Carilah volume dari pasak tersebut.



GAMBAR 16

34. (Jam air) Sebuah tangki air diperoleh dengan memutar kurva $y = kx^4$, $k > 0$ terhadap sumbu-y.
(a) Carilah $V(y)$, volume air dalam tangki sebagai fungsi kedalaman y.
(b) Air menetes melalui suatu lubang kecil sesuai dengan hukum Torricelli ($dV/dt = -m\sqrt{y}$). Tunjukkan bahwa ketinggian air turun dengan tingkat konstan.

35. Tunjukkan bahwa volume dari kerucut pada umumnya adalah $\frac{1}{3}Ah$, di mana A adalah luas dasar dan h tingginya. Gunakan hasil ini untuk mendapatkan rumus volume dari:
(a) Sebuah kerucut dengan alas lingkaran berjari-jari r dan tinggi h;
(b) Sebuah tetrahedron beraturan dengan panjang sisi r.



GAMBAR 17

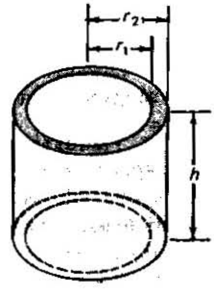
36. Nyatakanlah tujuan prinsip Cavalieri untuk volume (lihat Soal 36 pada Pasal 6.1).

6.3 Volume Benda Putar: Kulit Tabung

Ada cara lain untuk menghitung volume benda putar, yaitu metode kulit tabung. Untuk berbagai persoalan, metode ini lebih mudah digunakan ketimbang metode cakram atau metode cincin.

Sebuah kulit tabung adalah sebuah benda yang dibatasi oleh dua tabung lingkaran tegak yang sumbu simetrinya berimpit (Gambar 1). Apabila jari-jari tabung dalam adalah r_1, dan jari-jari tabung luar adalah r_2, sedangkan tinggi tabung adalah h, maka volume kulit tabung adalah

$$\begin{aligned} V &= (\text{luas alas}) \cdot (\text{tinggi}) \\ &= (\pi r_2^2 - \pi r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$



GAMBAR 1

Sehingga

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \times (\text{jari-jari rata-rata}) \times (\text{tinggi}) \times (\text{tebal}) \\ &= 2\pi\, rh\, \Delta r \end{aligned}$$